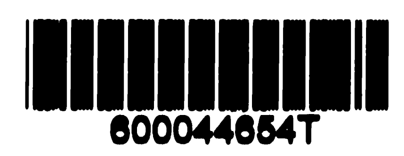



PRESS G. 6.
SHELF N.
Nº 7




600044654T

ESSAI

SUR LA

SYNTHÈSE DES FORCES PHYSIQUES.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
10607 Quai des Augustins, 55.

ESSAI

SUR LA

SYNTHÈSE DES FORCES PHYSIQUES,

PAR

LE P. AD. LERAY,
PRÊTRE EUDISTE,
PROFESSEUR A L'ÉCOLE SAINT-JEAN, A VERSAILLES.

**Constitution de la matière. — Mécanique des atomes.
Élasticité de l'éther.**



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Augustins, 55.

1885

PRÉFACE.

Comme les sciences physiques ont pour objet des faits contingents, il est impossible de les construire *a priori ;* et, dans leur étude, l'analyse doit toujours précéder la synthèse. Mais, lorsque l'observation et l'expérience ont constaté un grand nombre de phénomènes, lorsque l'analogie et l'induction ont amené la découverte des lois qui les régissent, lorsqu'enfin, partant des effets les plus éloignés et remontant de cause en cause, l'analyse nous a conduits jusqu'aux premiers principes, nous aimons à jeter un coup d'œil d'ensemble sur les objets étudiés; nous aimons à pénétrer les effets dans leurs causes et à voir découler des principes les conséquences qu'ils renferment.

Déjà plusieurs branches des sciences physiques ont réalisé des synthèses partielles qui font goûter à l'esprit cette pure jouissance; mais la synthèse générale n'est qu'à l'état d'ébauche. Pour la formuler d'une manière plus précise et plus complète, diverses tentatives ont été faites en ces dernières années, non sans utilité; et c'est un essai du même genre que j'entreprends et dont la publication actuelle offrira le début.

La tendance actuelle des savants est de ramener tous les phénomènes physiques à des modes de mouvement, et, sous ce rapport, j'entre pleinement dans leurs vues.

Par suite, les causes des phénomènes sont pour moi des causes de mouvement ou des forces.

La cause première est Dieu, force suprême et infinie, raison dernière de tous les mouvements. Mais c'est à tort que plusieurs philosophes considèrent Dieu comme donnant lui-même, par une action directe et immédiate, l'impulsion à tout ce qui se meut. Ils dépouillent ainsi la matière de toute force, de toute causalité réelle; et, s'ils lui attribuent encore le nom de *cause*, il ne s'agit plus de cause efficiente, mais simplement de cause occasionnelle.

Ce système des causes occasionnelles est généralement repoussé par les physiciens. Malheureusement, pour expliquer la production et la transmission des divers modes de mouvement, beaucoup substituent à l'intervention directe et immédiate de Dieu des actions à distance sans intermédiaire, nouvelle erreur plus grave que la précédente; car, s'il n'est pas vrai, au moins il est possible que Dieu détermine seul immédiatement toutes les modifications de la matière, puisqu'il est présent partout; mais il est de toute impossibilité qu'un corps agisse là où il n'est pas et que le Soleil, par exemple, meuve directement la Terre.

En opposition à ces doctrines, nous admettons entre la cause première et les phénomènes si multiples de la nature une série de causes secondes, de forces créées qui s'enchaînent et réagissent de mille manières les unes sur les autres pour produire cette variété et cette harmonie que nous admirons dans l'univers. Ces agents secondaires ont une sphère d'action limitée à l'espace qu'ils occupent substantiellement et ne peuvent s'influencer à distance, mais seulement au contact. Si donc, nous conformant au langage ordinaire, nous disons

qu'un corps agit sur un autre éloigné de lui, nous sous-entendrons toujours, par l'intermédiaire d'un agent répandu dans l'intervalle qui les sépare.

Plusieurs supposent aujourd'hui que le trait d'union qui relie tous les corps et tous les phénomènes est un fluide universel, l'éther, et cette doctrine s'est fortifiée récemment par des travaux nombreux sur la corrélation des forces et l'équivalent mécanique de la chaleur.

Marchant dans cette voie, j'ai cherché, il y a quelques années, à expliquer la gravitation universelle par l'action impulsive de courants d'éther, et j'ai développé cette explication dans un Opuscule publié en 1869 sous ce titre : *Constitution de la matière et ses mouvements; nature et cause de la pesanteur*. Depuis lors, l'étude de l'élasticité m'a forcé à reconnaître un fluide plus subtil que l'éther et à lui rapporter la cause de la gravitation. Mes calculs et mes raisonnements antérieurs subsistent, mais un nom doit être changé dans tout le cours de l'Ouvrage.

Je semble, il est vrai, m'éloigner ainsi du but poursuivi par les savants, l'unité des forces physiques. Au moment où l'on essaye de supprimer tous les fluides hypothétiques précédemment invoqués, pour ne conserver que l'éther et ramener par lui toutes les forces à l'unité, j'en imagine un nouveau, cause de la gravitation, et je parais séparer la gravité de toutes les autres forces plus ou moins rattachées au fluide éthéré. Mais, si les mouvements de l'éther sont eux-mêmes réglés par ceux du fluide primordial que j'appellerai, pour abréger le discours, du nom d'*éon* (*αἰών*), l'unité se trouve rétablie et tous les phénomènes physiques remontent originairement aux mouvements de l'éon.

Voici d'ailleurs la raison péremptoire qui m'oblige à

le faire intervenir. Si l'on rejette l'action à distance et si l'on s'arrête à la conception de l'éther, comme dernier intermédiaire des mouvements matériels, deux éléments voisins de ce fluide ne peuvent agir l'un sur l'autre que par voie de choc. Par suite, l'éther ne satisfait pas aux conditions d'un milieu élastique. En effet, un tel milieu exige que le moindre déplacement de l'un de ses éléments exerce une influence attractive ou répulsive sur les éléments circonvoisins, et les savants qui ont édifié la théorie mathématique de l'élasticité supposent même que les déplacements des atomes ou molécules sont très petits par rapport aux distances qui les séparent. D'un autre côté, la théorie des ondes lumineuses, si féconde en brillants résultats, est fondée tout entière sur l'élasticité de l'éther. Donc, pour rendre raison de cette propriété, il est indispensable de placer comme intermédiaire, entre les atomes éthérés, un fluide plus subtil.

Ce fluide, milieu impondérable et non élastique, expliquera la pesanteur et l'élasticité, et nous verrons, par des transformations diverses, tous les mouvements des corps dériver de l'impulsion de ses atomes.

Une étude préalable de la constitution de la matière est nécessaire pour établir la synthèse des forces physiques sur un fondement solide, et je débuterai par un Chapitre sur ce sujet. De ce Chapitre résultera d'une part l'impossibilité de l'action à distance et d'autre part l'élasticité des éléments matériels, pris individuellement. En conséquence, toutes les modifications de mouvement dériveront de chocs entre éléments élastiques, et, dans l'explication des phénomènes, je devrai éliminer toutes les forces fictives autres que les résultantes des actions de contact.

Aussi, pour mieux assurer la marche régulière de mes raisonnements, je consacrerai le deuxième Chapitre de ce Livre à l'examen des principes et des formules de Mécanique dont je pourrai faire un usage légitime, sans sortir du point de vue où je me suis placé.

Dans les Chapitres suivants, je passerai en revue les propriétés de l'éon et de l'éther, et j'établirai les lois qui président aux actions réciproques de leurs atomes. Je déterminerai ainsi la nature et la cause de l'élasticité de l'éther, et ce sera la conclusion dernière de cette première Partie de mon travail.

Dans des publications ultérieures, je me propose de montrer comment les éléments des corps simples transforment l'énergie cinétique de l'éon en énergie vibratoire; comment de cette transformation naissent l'affinité, la gravité, la chaleur et la lumière, comment les atomes d'éther propagent les mouvements vibratoires nés au sein des molécules et restituent peu à peu aux atomes éoniens la vitesse perdue, opérant ainsi dans l'univers une permanente circulation d'énergie; enfin comment l'éther, soumis lui-même à la pesanteur, engendre, par sa pression, les phénomènes de cohésion, et par les variations de cette même pression, les phénomènes d'électricité et de magnétisme.

Tel est le vaste champ que j'ai dessein de parcourir. Je n'ignore pas qu'il est semé d'écueils et que mon entreprise sera taxée de témérité; mais enfin il me semble entrevoir le lien qui unit en un seul faisceau toutes les forces physiques. Je suis charmé de l'unité majestueuse qui se révèle aux regards de mon esprit, et je ne puis résister au désir de manifester au grand jour le spectacle que j'admire. Si c'est une vaine imagination, les juges compétents en auront bientôt fait justice,

et je serai seul à subir la déception et le désenchantement de mes rêves dorés. Si c'est une réalité, je ferai goûter à d'autres le bonheur que j'éprouve dans la contemplation des œuvres de Dieu, et c'est là mon vœu le plus cher. Puisse-t-il être exaucé !

Je ne connais de système ayant de l'analogie avec le mien que celui de Georges Lesage, de Genève. Les points communs sont le rejet de l'action à distance et l'explication de la pesanteur universelle par l'impulsion d'un fluide distinct de l'éther. Mais, dans la conception même de cet agent, une différence capitale nous sépare. Suivant Georges Lesage, les atomes de ce fluide, qu'il appelle *corpuscules ultramondains*, sont dénués d'élasticité, tandis que, selon moi, ils sont parfaitement élastiques. L'explication des phénomènes naturels par le choc de ces atomes doit donc être essentiellement différente.

AD. LERAY.

ESSAI

SUR LA

SYNTHÈSE DES FORCES PHYSIQUES.

CHAPITRE I.

CONSTITUTION DE LA MATIÈRE.

ARTICLE I.

Exposé succinct et rejet des principaux systèmes.

1. On nomme *matière* la substance des corps, et l'on appelle *corps* tout ce qui peut affecter nos sens. Nous ne connaissons les corps que par leurs qualités sensibles; mais nous rapportons nécessairement ces qualités à un sujet, et sous la variété des phénomènes externes nous concevons un être permanent et invariable qui en est le support. Cet être, c'est la substance des corps, c'est la matière.

Quelle est son essence? A cette question, deux réponses principales ont été faites : la première affirme que l'essence de la matière consiste dans l'étendue, et la seconde soutient que la matière se résout par la division en éléments simples inétendus ou monades. Parmi les partisans de la première opinion, les uns défendent le plein absolu, les autres admettent entre les corps des espaces vides. Parmi les partisans de la seconde, les uns rejettent toute action entre les monades, les autres reconnaissent entre elles des attractions et des répulsions.

Tous ces systèmes nous présentent des difficultés insurmontables, que nous allons indiquer brièvement.

2. Premier système : *L'étendue, essence de la matière, et le plein absolu.* — Dans ce système, soutenu par Descartes, non seulement toute matière est essentiellement étendue, mais toute étendue est matière. De là le plein absolu et l'impossibilité du vide. De plus, cette étendue matérielle est impénétrable. Si l'impénétrabilité n'est pas de l'essence même de la matière, elle est du moins admise comme un fait incontestable.

Ces données nous suffisent pour rejeter ce système; car il est incompatible avec le mouvement. Si l'on peut, à la rigueur, concilier avec la matière impénétrable et le plein absolu des mouvements de rotation, comme celui d'une sphère sur son centre, d'une roue sur son axe, les mouvements de translation rectiligne sont de tout point inexplicables.

3. Deuxième système : *La matière étendue et impénétrable, et des vides interposés.* — Observons que les vides en question n'ont aucune réalité objective. Dans ce système, la triple dimension ne se trouve réalisée que par la présence des corps, et, en leur absence, il n'y a qu'une pure possibilité de les contenir ou le vide.

Si ce système offre sur le premier l'avantage de laisser le champ libre aux mouvements, philosophiquement, il nous paraît plus inadmissible; car comment concevoir que des corps réels soient tenus à distance par des vides qui sont de pures possibilités? Au point de vue concret, la pure possibilité, c'est la négation de la réalité, c'est le néant; et le néant ne peut établir entre des êtres réels une relation positive, comme est celle de la distance. Qu'on ne dise pas que la distance est une relation négative, la négation de contact; car, s'il en était ainsi, toutes les distances deviendraient égales, ce qui est évidemment faux.

En résumé, des deux opinions précitées, la première explique très bien la distance de deux corps par l'étendue de la matière interposée, mais elle s'oppose au mouvement; la deuxième n'explique ni la distance, ni le mouvement, puisqu'elle n'a pour les expliquer que le néant de ses vides.

4. Troisième système : *Les monades sans action réciproque.* — Ce système échappe aux difficultés qu'on a soulevées

contre la divisibilité indéfinie de la matière, admise dans les systèmes précédents, mais il entraîne à sa suite des conséquences bien autrement graves. D'abord il ne réalise pas l'étendue; car on ne saurait produire une quantité dimensive avec des éléments sans dimension. Aussi Leibnitz, inventeur de ce système, réduit-il l'étendue à un simple rapport, en la définissant un rapport de coexistence entre les monades. Par cela seul que plusieurs monades coexistent, elles peuvent déterminer en nous la perception de l'étendue. Ainsi, une monade seule, pas d'étendue, deux monades à la fois, de l'étendue. Mais quelles sont les dimensions de cette étendue minimum? Impossible de le dire.

D'autre part, en supprimant l'action réciproque des monades les unes sur les autres, Leibnitz détruit les causes secondes : d'après lui, jamais un mouvement d'un corps n'influe sur celui d'un autre; et, si nous remarquons une correspondance et une régularité admirable entre les mouvements de l'univers, c'est que Dieu a établi à l'avance l'ordre harmonieux dans lequel ils devaient se produire. De là le nom d'*harmonie préétablie* donné à ce système. « Quand l'âme de Virgile, dit Leibnitz, produisait l'*Énéide*, sa main écrivait le même poème, sans obéir en aucune façon à l'intention de l'auteur; mais Dieu avait réglé de tout temps que l'âme de Virgile ferait des vers, et qu'une main attachée au corps de Virgile les mettrait par écrit. » (*Extrait d'une lettre de Leibnitz.*)

Outre que ce système va contre le sentiment intime que nous avons de l'influence de notre volonté sur les mouvements de notre corps, il tend au fatalisme.

5. Quatrième système : *Les monades avec action réciproque.* — Le P. Boscovich a modifié le système de Leibnitz, en accordant aux monades une activité externe et les considérant comme centres de forces attractives et répulsives. Mais la difficulté d'expliquer l'étendue subsiste, et l'harmonie préétablie se trouve remplacée par l'action à distance qui est tout aussi impossible. En effet, l'activité est une faculté de la substance, et l'action n'est autre chose que l'opération de cette faculté. Or la faculté est inséparable de la substance en

qui elle réside, et l'opération est inséparable de la faculté qui opère. Donc, l'action séparée de la substance qui agit, l'action à distance, est de toute impossibilité.

En d'autres termes, l'action est une manière d'être de la substance agissante. Or les manières d'être sont inhérentes au sujet qu'elles modifient; donc elles ne peuvent exister hors de lui, à distance.

Peu importe le rapprochement plus ou moins grand des substances que l'on considère. C'est se faire illusion que de nier l'action à de grandes distances et de l'accorder à de petites, si petites qu'elles soient. A un millionième de millimètre, l'action est aussi impossible qu'à un billion de kilomètres. C'est se faire illusion que d'admettre des forces simples résidant en un point mathématique et ayant une sphère d'activité quelconque... On aura beau dire qu'on rejette l'action à distance et que deux forces simples ne peuvent agir l'une sans l'autre sans le contact de leurs sphères d'activité. Que signifie ce langage, sinon que les forces simples agissent, du centre où on les suppose, jusqu'à la distance du rayon de leurs sphères d'activité? Qu'est-ce autre chose qu'une action à distance?

Plusieurs partisans du P. Boscovich expliquent les actions à distance par une intervention directe de Dieu et considèrent les monades non comme causes efficientes, mais simplement comme causes occasionnelles de mouvement. Dieu, disent-ils, a voulu que les mouvements des monades soient modifiés suivant une loi qui dépend de leurs distances respectives, et lui-même opère à chaque instant ces modifications et exécute la loi qu'il a posée. Cette conception n'offre rien en soi qui répugne, mais elle a le grave inconvénient d'enlever toute causalité réelle à la matière. Dieu n'est plus un premier moteur qui met en jeu des causes secondes de mouvement; il est seul moteur et sa force motrice est incommunicable comme sa force créatrice.

Appliqué à l'homme, ce système va, comme celui de Leibnitz, contre le sentiment intime que nous avons de l'influence de notre volonté sur les mouvements de notre corps. Appliqué aux animaux et aux plantes, il déflore la vie. L'instinct et les forces vitales font place à un mécanisme ingé-

nieux que Dieu seul a construit et dont il fait seul jouer tous les ressorts. Restreint aux êtres inanimés, il dépouille encore la création de l'un de ses charmes, en faisant évanouir cette hiérarchie d'agents secondaires que l'esprit aime à se représenter agissant sous la dépendance et avec le concours de Dieu. Enfin ce système a contre lui l'opinion générale des philosophes, entre lesquels je me bornerai à citer saint Thomas : « *Inferiora* (*Deus*) *gubernat per superiora, non propter defectum suæ virtutis, sed propter abundantiam suæ bonitatis, ut dignitatem causalitatis etiam creaturis communicet* (¹). »

Cette discussion rapide a fait voir ce que nous rejetons dans les systèmes précédents; nous allons maintenant exposer ce que nous admettons, et construire notre propre système.

Avec Descartes, nous allons défendre la réalité de l'étendue substantielle, et, avec Leibnitz, la réalité des forces simples. Mais, avant tout, nous devons expliquer notre manière de concevoir l'étendue; car c'est le point capital de notre système.

ARTICLE II.

De l'étendue et de l'espace.

6. L'étendue est définie par beaucoup de physiciens la propriété que possède la matière d'occuper une certaine portion d'espace. Cette définition distingue l'espace occupé par la matière de l'étendue de la matière, et cette distinction est conforme au langage usuel; car on appelle communément l'espace occupé par un corps le lieu, l'endroit, la place de ce corps, et l'on regarde cet espace comme fixe et immobile. Un corps en se mouvant n'emporte pas sa place; mais il occupe successivement différents lieux.

Tout en reconnaissant cette distinction entre le lieu d'un corps et son étendue, les philosophes refusent d'ordinaire au lieu toute réalité propre. Selon eux, il ne devient réel que par

---

(¹) *Summa theologica,* Pars I, quest. 22, art. 3.

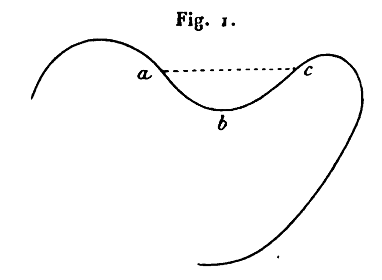
la présence des atomes étendus ou des monades inétendues. Contrairement à cette opinion, nous prétendons que le lieu possède par lui-même une réalité indépendante de celle des corps. Cette proposition résulte du rejet des systèmes exposés dans l'article précédent.

Les monades, en effet, sont impuissantes à rendre compte des distances; le vide néant n'explique rien; le plein absolu répugne au mouvement. Il faut donc reconnaître entre les corps un espace ayant des dimensions réelles qui mesurent les distances, un espace pénétrable qui se prête à tous les mouvements. C'est l'étendue substantielle de Descartes, moins l'impénétrabilité et les qualités corporelles qui en découlent.

7. Hâtons-nous toutefois de prévenir les soupçons de panthéisme que cette conception pourrait éveiller, en déclarant que notre espace réel est fini. Le supposer infini serait admettre un nombre infini réalisé, ce qui répugne; car, dans cette hypothèse, il devrait renfermer un nombre infini de mètres cubes, par exemple. Or il est clair qu'un nombre infini de mètres cubes, c'est-à-dire un nombre de mètres cubes plus grand que tout nombre possible est une absurdité, puisqu'un nombre de mètres cubes, quel qu'il soit, est évidemment 1000 fois plus petit que le nombre de décimètres cubes qu'il renferme. L'espace réel contient donc nécessairement un nombre fini de mètres cubes, et par conséquent il a une surface qui le limite.

8. Nous pouvons ajouter que cette surface a une forme

Fig. 1.



convexe; car, si elle offrait une concavité *abc* (*fig.* 1), on au-

rait du point *a* au point *c* une distance réelle *ac* qui ne serait pas un espace réel, contradiction manifeste. Cette contradiction tient à la continuité de l'étendue, et nous croyons pouvoir formuler cette proposition générale : *Deux quantités continues quelconques ne peuvent être séparées que par une quantité continue de même espèce.* Ainsi un temps réel ne peut être séparé d'un autre temps réel par un intervalle vide de temps, et de la même manière deux étendues réelles ne peuvent être séparées par un vide absolu.

9. Ce qui peut induire en erreur dans cette question des limites de l'espace, c'est le sens multiple dans lequel se prend le mot *espace*. Outre l'espace réel, lieu de l'univers matériel, dont nous venons de parler, il y a l'espace idéal et l'espace imaginaire.

L'espace idéal n'est autre chose que l'idée générale d'espace. C'est la triple dimension, à l'état de pure abstraction. Cet espace est l'idée mère de la Géométrie, et dans cette science l'esprit humain ne se borne pas à abstraire de l'espace réel la triple dimension ou le volume : il sépare même les dimensions les unes des autres, pour considérer à part les surfaces et les lignes.

10. L'espace imaginaire, comme l'indique son nom, est la représentation de l'espace réel indéfiniment agrandi par l'imagination. On cherche à se transporter en esprit aux limites du monde, et on les voit reculer, reculer sans cesse. Ce fait prouve uniquement que nous concevons la possibilité d'un espace de plus en plus grand. Notre imagination fait alors, pour les dimensions de l'univers, ce qu'elle fait pour la taille d'un homme lorsqu'elle se représente un géant dont la tête s'élève au-dessus des arbres, au-dessus des nuages, au-dessus de la Lune, du Soleil et des étoiles. L'espace imaginaire n'a pas plus de réalité que ce géant fantastique.

11. Revenons à notre espace réel, que nous pouvons concevoir comme une sphère immense, lieu de l'univers, et cherchons à préciser davantage sa nature.

Dans quelle catégorie d'êtres le rangerons-nous? D'après ce qui précède, il a une existence propre, indépendante des

corps et de tout autre sujet auquel nous devions le rapporter comme attribut. Il a donc tous les caractères de la substance, suivant la définition commune : « *Substantia est id quod nullo alio indiget, cui inhæreat ad existendum.* »

Cette dénomination de substance, appliquée à l'espace ou à la triple dimension réalisée, choque au premier abord, parce que d'ordinaire on comprend dans ce mot plus que ne comporte la définition. Si, par exemple, on établit un lien nécessaire entre l'idée de substance et celle d'activité, on sera naturellement choqué d'entendre appeler substance un être comme l'espace, incapable d'agir. Mais aussi nous nions que la définition de la substance implique l'activité, et nous proposerions volontiers de classer ainsi les substances :

En première ligne, la substance purement active, Dieu seul, acte pur.

En dernier lieu, la substance purement passive, l'espace réel [1]; entre ces deux extrêmes, toutes les autres substances, à la fois actives et passives à des degrés divers.

Mais une substance purement passive, n'est-ce pas le néant? Non, certes. Le néant n'est ni actif, ni passif. Pour pâtir, comme pour agir, il faut être, et la capacité de contenir les corps ne saurait convenir au néant.

Ces explications sur l'espace étaient nécessaires pour l'intelligence de la définition de l'étendue, considérée comme propriété des corps. L'étendue, avons-nous dit au début de cet article, est la propriété que possède la matière d'occuper une certaine portion d'espace. Nous sommes fixés maintenant sur le sens du mot *espace;* mais comment la matière occupe-t-elle l'espace? Question importante à laquelle nous ne pouvons répondre avant d'avoir résolu cette autre :

---

[1] Dans sa *Métaphysique* (Disputatio XIII, Sectio X), Suarez s'exprime ainsi :

« *Ad decorem et perfectionem universi pertinebit talis substantia; sunt enim in universo quædam substantiæ simplices non quantæ, et aliæ substantiæ compositæ et corporeæ; ergo ut in universo sit omnium rerum vel graduum varietas, optime quadrat ut sit aliquando substantia simplex quoad compositionem physicam et essentialem, quanta vero et composita ex partibus integrantibus.* »

C'est bien la substance que je conçois.

La matière est-elle divisible à l'infini, ou se décompose-t-elle en éléments simples?

Nous distinguons le lieu occupé par la matière de la substance matérielle, et nous allons établir dans les deux articles suivants : 1° que le lieu ou l'espace réel est divisible à l'infini, et 2° que la substance matérielle se décompose en éléments simples.

ARTICLE III.

L'espace réel est divisible à l'infini.

12. Personne ne conteste que l'espace idéal, la triple dimension abstraite, objet de la Géométrie, soit indéfiniment divisible. Or le passage du possible au réel ne change pas l'essence des choses. Donc, l'espace réalisé doit jouir des propriétés nécessairement comprises dans l'idée d'espace.

On objecte à ce raisonnement que l'indéfini acceptable dans l'ordre des possibles ne l'est plus dans l'ordre des réalités. Ainsi, dit-on, au point de vue abstrait, on peut concevoir des grandeurs qui croissent ou décroissent indéfiniment; mais toute grandeur concrète est nécessairement finie. C'est vrai. Aussi ne prétendons-nous pas que l'espace réel soit indéfini; bien au contraire, nous avons prouvé qu'il était fini et limité. Ce qui est indéfini, c'est le nombre de divisions qu'on peut lui faire subir, et ce nombre peut croître indéfiniment, parce que, si, après un nombre fini de divisions, on arrivait à des parties simples, il en résulterait qu'une dimension finie serait la somme d'éléments sans dimension. C'est comme si l'on disait qu'avec un certain nombre de zéros on peut former une unité.

13. Ajoutons que, s'il fallait reléguer dans l'ordre des possibles la divisibilité à l'infini, il faudrait, par là même, rejeter toutes les applications du Calcul infinitésimal à l'ordre réel; car la notion d'infiniment petit est inséparable de la divisibilité indéfinie.

Soit, par exemple, une quantité finie a. Divisons cette quantité en 1000 parties égales, chacune de ces parties en 1000 autres et ainsi de suite; nous aurons pour valeur des

parties successives obtenues de cette sorte $\frac{a}{1000}$, $\frac{a}{1000^2}$, $\frac{a}{1000^3}$, ... ou un millième, un millionième, un billionième de a.

On pourrait convenir aussi d'appeler ces fractions des millièmes de premier, de deuxième, de troisième ordre, le numéro d'ordre indiquant combien de fois on aurait répété la division par 1000.

Si, au lieu de diviser par 1000, nous avions divisé par 1 000 000, nous aurions obtenu des millionièmes de premier, de deuxième, de troisième ordre. Enfin, si nous avions divisé par un nombre n, tel que la première fraction $\frac{a}{n}$ fût négligeable en comparaison de a, la deuxième fraction eût été négligeable en comparaison de la première, la troisième en comparaison de la deuxième, etc., car les rapports entre deux fractions consécutives sont égaux.

$$\frac{a}{n} : a = \frac{a}{n^2} : \frac{a}{n} = \frac{a}{n^3} : \frac{a}{n^2} = \ldots = \frac{1}{n}.$$

Quand n est assez grand pour qu'on puisse négliger $\frac{1}{n}$, les mathématiciens appellent les fractions successives des infiniment petits de premier, de deuxième, de troisième ordre. Dans leurs raisonnements sur ces infiniment petits, ils laissent n indéterminé, et alors on peut toujours lui supposer une valeur aussi grande qu'on veut, et rendre $\frac{a}{n}$ plus petit que toute grandeur assignable; d'où il suit que les résultats des calculs, obtenus en considérant $\frac{a}{n}$ comme négligeable par rapport aux quantités finies, et les infiniment petits d'ordres supérieurs comme négligeables par rapport à ceux d'ordres inférieurs, ne sauraient contenir d'erreur appréciable, et doivent être regardés comme rigoureusement exacts.

Le nombre n ainsi conçu est bien indéfini et peut croître sans limite; mais évidemment il n'est pas infini dans l'esprit des mathématiciens, puisqu'ils l'élèvent à toutes les puis-

sances n^2, n^3, ... comme un nombre ordinaire. Ils conçoivent la quantité finie a partagée en un nombre de parties indéfiniment grand ou en parties indéfiniment petites, et ce sont ces parties qui constituent leurs infiniment petits de divers ordres. Or il est incontestable que le Calcul infinitésimal s'applique à l'ordre réel. Donc il existe dans l'ordre réel des grandeurs divisibles à l'infini. Ce sont toutes les quantités continues, et la première, fondement de toutes les autres, est l'espace réel.

14. On ne peut échapper à ces conclusions qu'en niant la réalité objective de l'espace et de l'étendue des corps, et cette négation conduit à l'idéalisme. Car, si l'on refuse l'objectivité à l'étendue, il faudra la refuser à toutes nos perceptions sensibles, qui toutes reposent sur l'étendue; et, si toutes nos perceptions sensibles sont purement subjectives, comment saurons-nous s'il existe des corps ou du moins si les qualités des corps ont du rapport avec celles que nous leur attribuons.

ARTICLE IV.

La substance matérielle se décompose en éléments simples.

15. Puisque l'espace occupé par la matière est divisible à l'infini, il semble naturel d'admettre que la matière l'est aussi, et qu'elle est sujette aux mêmes divisions que son lieu. Si les subdivisions du lieu répondaient à des parties différentes de la matière, il en serait nécessairement ainsi. Mais, si la substance d'un élément matériel, au lieu de correspondre partie par partie à l'espace qu'elle occupe, est simple et identiquement la même en chaque point de son lieu, la division du lieu n'entraîne plus celle de la substance.

Qu'on ne dise pas que cette opinion répugne, et qu'une substance simple ne peut être simultanément présente en plusieurs portions d'espace; car la présence simultanée de Dieu, substance absolument simple, en tous les lieux de l'univers, est une vérité de raison non moins que de foi. La multiplication de la présence ne détruit pas la simplicité de la substance.

La question de la divisibilité indéfinie de la matière n'est donc pas tranchée par celle de la divisibilité du lieu. Reste à savoir si la substance de l'élément matériel n'est pas simple quoique localisée.

Observons en passant que souvent on parle de substances simples, de forces simples résidant en un point mathématique de l'espace. Nous ne pouvons comprendre ce langage. Le point mathématique ou sans dimension n'a pas de réalité par lui-même, et conséquemment ne peut être occupé. Si par point on entendait un volume excessivement petit, à la bonne heure; mais on semble supposer qu'une substance simple ne peut occuper un lieu fini sans cesser d'être simple, sans acquérir les dimensions de ce lieu, ce qui est faux.

Sans doute, il y a un mystère pour notre esprit dans les rapports des substances simples avec l'espace; mais il y a bien plus qu'un mystère, il y a une contradiction à soutenir qu'une substance simple est dans l'espace sans occuper d'espace, puisque encore une fois le point sans dimension est la négation de tout espace. Nous concevons que les substances simples puissent exister en dehors de l'espace sans aucun rapport avec lui, mais nous ne concevons pas qu'elles soient localisées, sans occuper un lieu réel, ayant des dimensions réelles.

16. Revenons à notre question : la substance de l'élément matériel est-elle simple ou continue? Nous affirmons qu'elle est simple, et nous allons déduire sa simplicité de son activité, en montrant qu'une substance continue et divisible à l'infini est incapable d'agir.

Nous sommes, ici, d'accord avec les partisans des monades, qui soutiennent que toute force est simple, et nous combattons contre les atomistes. Ceux-ci prétendent que la matière est divisible à l'infini comme l'espace. Seulement ils reconnaissent que, de fait, on arrive par la division à des éléments qu'aucun agent naturel ne peut plus diviser et qu'ils nomment *insécables* ou *atomes*.

Mais, pour que les parties toujours réelles de ces atomes soient physiquement inséparables, il faut qu'il y ait entre elles une force unitive très puissante. Or, avec la substance

continue, il est impossible de rendre raison de cette force. D'abord, dans une telle substance, il ne peut pas y avoir de centre d'action, puisqu'il n'y a pas de partie simple, et l'activité qu'on lui accorderait serait divisible à l'infini. Par suite, tout déploiement fini d'activité serait la résultante d'un nombre illimité de forces infinitésimales dispersées dans la substance de l'atome. Mais comment ces forces, qui n'occupent pas le même lieu, peuvent-elles concourir à un même acte ? N'est-ce pas rétablir l'action à distance ?

17. Il est vrai que, parmi les atomistes, plusieurs déclarent impossible l'action à distance; ils conviennent qu'un atome ne peut agir sur un autre qu'au contact et par voie de choc; mais il nous semble que, dans les explications mêmes qu'ils donnent du choc, ils admettent cette action à distance. Lorsque, par exemple, un atome est choqué par un autre, ils disent qu'il résiste au choc, non pas seulement par la force infinitésimale résidant au point de contact, mais comme si toute sa masse était concentrée en ce point. Or, de fait, cette concentration n'a pas lieu. Donc les parties éloignées du point de contact sont censées agir à distance en ce point.

18. Les atomistes ne peuvent non plus expliquer la communication du mouvement sans action à distance. S'ils considèrent la forme des atomes comme inaltérable, quand l'un d'eux vient à être choqué, toutes ses parties doivent entrer à la fois en mouvement. La force impulsive, présente au seul point de contact, agit donc instantanément sur toutes les parties de l'atome. C'est bien là une action à distance. On ne peut pas répliquer que l'action se transmet de couche en couche; car, pour la transmission, il faudrait que la partie choquée prît d'abord un mouvement, le communiquât à la partie voisine, celle-ci à la suivante, et ainsi de suite. Or cette succession ne peut avoir lieu dans l'hypothèse de la forme inaltérable; et, à vrai dire, si l'on voulait parler d'une succession logique, il serait plus naturel de soutenir que c'est le point opposé à la partie choquée qui part le premier pour faire place aux suivants.

19. Examinons maintenant si l'on ne pourrait pas supposer

les atomes susceptibles de modifier leur forme. Il est certain d'abord qu'ils ne peuvent modifier leur volume, puisque leur substance est continue et impénétrable. J'ajoute qu'ils ne peuvent pas davantage modifier leur surface et, sous l'action d'un choc, passer d'une forme à une autre. Car la moindre déformation au point de contact déterminera au même instant une déformation à distance pour la conservation du volume. La seule différence avec le cas précédent, c'est que tout l'atome ne prendra pas nécessairement part au mouvement produit. Mais, pour nous, la conséquence est la même, puisque l'action à distance est aussi impossible sur une partie que sur le tout.

De cette discussion il résulte que l'activité ne peut appartenir qu'à une substance simple. Or il est certain que les éléments matériels agissent et réagissent les uns sur les autres. Donc il faut reconnaître que leur principe d'action est simple, quoique localisé.

ARTICLE V.

Constitution et propriétés de l'élément matériel.

20. Voici donc la véritable conception de l'élément matériel : une substance simple, une monade localisée, c'est-à-dire présente dans un petit volume d'espace réel, tout entière en chaque partie de ce volume, comme Dieu est présent dans tout l'univers.

L'élément matériel ainsi conçu peut être appelé *atome* dans le sens le plus strict; car non seulement il est insécable relativement aux agents naturels, mais il l'est d'une manière absolue, en raison de la simplicité de la monade qui le forme. Nous conserverons donc le nom d'*atome* pour désigner l'élément matériel; et, d'après les explications données et celles qui vont suivre, on ne pourra se méprendre sur la signification précise que nous attachons à ce mot.

21. Pour nous, l'atome est composé d'un espace réel et d'une monade, comme l'homme est composé d'un corps et d'une âme; et la monade est présente à tout le volume d'espace, comme l'âme, suivant beaucoup de philosophes, est

présente à tout le corps. Cette présence dans les deux cas est une présence d'action. Comme l'âme communique la vie au corps, la monade communique l'impénétrabilité à l'espace qu'elle occupe. Toutefois, tandis que l'âme est toujours unie au même corps, la monade, dès qu'elle se meut, cesse d'être unie au même espace et rend impénétrables successivement différents lieux. Sous ce rapport même, la différence de constitution n'est pas aussi grande qu'elle paraît au premier abord, car le corps humain ne se compose pas, à toutes les époques de la vie, d'éléments identiques. Tous les organes sont le siège de phénomènes d'excrétion et d'assimilation qui éliminent sans cesse d'anciens éléments pour leur en substituer de nouveaux. Le mouvement vital détermine donc, peu à peu, le renouvellement de la matière de notre corps, comme le mouvement de translation détermine le changement de lieu pour l'atome. Ce qui persiste, c'est la partie la plus noble des deux composés, l'âme dans l'homme et la monade dans l'atome; et de même que l'âme, principe de la vie du corps, maintient son organisation, sa physionomie spéciale, la monade maintient aussi dans l'atome son volume et sa forme géométrique. Elle est le principe actif de l'atome, ce que les scolastiques appelaient une forme substantielle, et, à ce propos, nous pourrions signaler entre notre système et celui des scolastiques plusieurs autres rapprochements. Notre espace réel pourrait répondre à leur matière première, et notre atome se trouverait constitué, suivant leur langage, par l'union de la matière et de la forme. Mais, contrairement à leur opinion, nous soutiendrions que la matière peut exister sans la forme, et que la forme n'est pas tirée de la matière.

22. Nous avons insisté sur la comparaison de l'homme et de l'atome, parce qu'elle nous a semblé propre à éclaircir l'idée que nous nous faisons de l'élément matériel. Maintenant nous éprouvons le besoin de déclarer que nous n'établissons néanmoins aucune parité de nature entre la monade et l'âme humaine. Sans doute l'une et l'autre sont simples; mais Dieu aussi est simple, et personne ne s'avise, pour ce motif, de mettre sur le même pied la nature divine et la nature humaine.

Sans doute encore nous avons prouvé que tout principe actif est simple, et l'on pourrait également soutenir la réciproque que tout être simple est actif; mais les êtres simples peuvent posséder l'activité à des degrés très divers, et, par suite, avoir des natures très dissemblables, car la nature est constituée par l'ensemble des facultés ou des propriétés, et non par la simplicité de la substance.

23. Après avoir précisé la constitution de l'élément matériel, disons quelques mots de ses propriétés générales. Nous en mentionnerons cinq principales : l'étendue, l'impénétrabilité, la mobilité, l'inertie et l'élasticité.

1° *Étendue.* — L'étendue est comprise dans l'essence même de l'atome, et nous en avons déjà suffisamment parlé. Cependant, pour éviter toute confusion et ne pas attribuer à la monade les propriétés de son lieu, il est bon d'observer que le mot étendue a un double sens. Tantôt il signifie la propriété d'occuper un espace, et tantôt il désigne les dimensions de l'espace occupé. Dans le premier sens, il convient à la monade, mais nullement dans le deuxième. Ainsi, quand nous parlerons des dimensions de l'atome, il faudra entendre les dimensions, non de la monade, mais du volume qu'elle occupe.

24. 2° *Impénétrabilité.* — L'atome est impénétrable, c'est-à-dire que deux monades ne peuvent occuper simultanément le même lieu. Chacune a son volume propre, qui est comme un domaine réservé, absolument infranchissable. Nous ne prétendons pas cependant que la monade doive exclure de son lieu toute sorte de substance. Nous avons déjà dit que Dieu est présent partout, et nous admettons l'opinion que l'âme est présente à tout le corps. Par suite, nous reconnaissons que, dans l'espace occupé par un atome du corps humain, trois substances simples sont simultanément présentes : Dieu, l'âme et la monade. L'impénétrabilité ne s'applique donc qu'aux rapports des monades entre elles. L'atome n'est impénétrable que pour un autre atome.

25. 3° *Mobilité.* — L'atome est mobile, c'est-à-dire qu'il peut occuper successivement différents lieux. Comme le cha-

pitre suivant doit être consacré à l'étude du mouvement, nous nous contenterons d'observer ici que la mobilité est une propriété, non du composé ou de l'atome tout entier, mais de la monade, car l'espace est fixe et immobile. Quand donc nous disons qu'un atome se meut, il faut entendre que sa monade se déplace et rend successivement impénétrables différentes portions d'espace.

26. 4° *Inertie.* — L'atome est inerte, c'est-à-dire incapable de modifier par lui-même son état de repos ou de mouvement. On pourrait rattacher à l'inertie l'impuissance de l'atome à diminuer ou à agrandir son volume. Que l'espace occupé par une monade puisse croître ou décroître, spécialement sous l'action de Dieu, il n'y a rien en cela qui répugne. Mais, d'elle-même, la monade ne peut pas plus modifier son volume que son état de repos ou de mouvement, et, dans l'explication des phénomènes naturels, nous supposerons toujours le volume de l'atome invariable.

27. 5° *Élasticité.* — L'atome est élastique, c'est-à-dire que, dans les chocs, il subit une déformation momentanée et revient ensuite à sa première forme. Comme le volume est constant, la déformation porte uniquement sur la surface.

L'élasticité des corps composés, du moins dans certaines limites, est admise par tout le monde, c'est un fait; mais l'élasticité des atomes est communément rejetée. Ce rejet tient à l'idée qu'on se fait de l'élément matériel, suivant la doctrine des atomistes. On le conçoit uniquement formé d'une substance continue impénétrable, et alors il est impossible de rendre raison des mouvements de matière que supposerait une déformation. De plus, comme nous l'avons montré ci-dessus, toute déformation, dans cette hypothèse, exigerait une action à distance.

Ces difficultés, qu'on peut à bon droit opposer à l'élasticité des atomes, dans les autres systèmes, s'évanouissent dans le nôtre. Pour nous, l'atome est constitué par une monade localisée. Lorsqu'une autre monade en mouvement vient pour envahir son domaine, elle reçoit le choc au point de contact; et, puisqu'elle est simultanément présente en tous les points de son lieu, elle peut, sans action à distance, modifier la sur-

face de son volume et lui restituer ensuite sa forme ordinaire avec une exactitude mathématique.

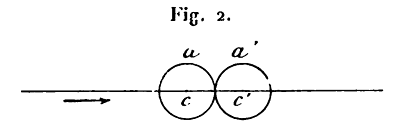
La déformation consiste dans un simple déplacement de l'action de la monade. Avant le choc, par exemple, elle agissait sur un espace sphérique; pendant le choc, elle agira sur un espace ellipsoïdal, et l'excentricité de l'ellipsoïde impénétrable pourra croître avec la durée et la violence du choc. Il n'y a là ni action à distance, ni mouvement de matière continue. C'est une modification dans l'activité de la monade déterminée par la rencontre d'une autre monade et résultant de leur impénétrabilité mutuelle.

28. Ces explications montrent bien que notre atome peut être élastique, mais la possibilité n'est pas le fait, et nous devons recourir à d'autres arguments pour établir l'existence même de l'élasticité.

Nous en tirons une première preuve de la loi de continuité des phénomènes naturels qui est généralement admise et qui peut se formuler ainsi : Une quantité continue ne passe d'une valeur à une autre qu'en prenant successivement toutes les valeurs intermédiaires. Elle répond à cet adage : *natura non facit saltum.* Or cette loi est violée dans le choc des atomes, s'ils ne sont pas élastiques.

Soient, en effet, deux atomes égaux a et a' (*fig.* 2), le second

Fig. 2.



en repos, et le premier en mouvement avec la vitesse v dans la direction cc' de la ligne des centres. Si leur forme est invariable, à l'instant où a touche a', il l'entraîne avec lui, et tous les deux se meuvent de concert avec la vitesse $\frac{v}{2}$. Ainsi la vitesse de a passe subitement de v à $\frac{v}{2}$, et celle de a' de zéro à $\frac{v}{2}$, double transition brusque et contraire à la loi de continuité.

De plus, un autre principe général, que nous allons expliquer dans le Chapitre suivant, le principe de conservation des forces vives, est également violé, car il exigerait que la somme des carrés des vitesses fût constante. Or elle est v^2 avant le choc et $\frac{1}{2}v^2$ après. Donc, ou il faut rejeter la loi de continuité et la conservation des forces vives, ou il faut admettre l'élasticité des atomes qui ménage les transitions d'une vitesse à une autre et qui conserve les forces vives, comme nous le dirons plus loin.

29. Une autre preuve de l'élasticité des éléments matériels se tire de l'élasticité des corps composés. En effet, si l'on élimine les forces abstraites d'attraction et de répulsion à distance, sur lesquelles on s'appuie d'ordinaire pour rendre compte des phénomènes d'élasticité, il n'y a pas d'autre source d'explication que l'élasticité même des atomes. A ceux qui nous objecteraient que les atomes des corps ne se touchent pas, nous répondrions que si les éléments de matière pondérable n'arrivent pas au contact, il faut qu'ils soient plongés dans un fluide impondérable dont les atomes les choquent incessamment.

Pour toutes ces raisons, nous nous croyons en droit de ranger l'élasticité au nombre des propriétés générales des éléments matériels. Avec l'impénétrabilité, c'est elle qui caractérise le mieux l'activité de la monade. Si l'impénétrabilité engendre une résistance absolue à la pénétration, l'élasticité à son tour résiste à la déformation avec une énergie proportionnelle à la force du choc, et c'est sur cette résistance qu'est fondé le principe de la réaction égale à l'action. La première conserve le volume et la seconde conserve la forme. Toutefois, la première seule est constamment en acte; la seconde ne se manifeste que dans le choc des atomes.

ARTICLE VI.

Atomes simples. — Atomes chimiques. — Molécules.

30. Avant de clore ce Chapitre, demandons-nous encore si l'élément matériel est unique ou multiple, s'il y a des atomes

de diverses sortes, si les molécules diffèrent essentiellement des atomes et en quoi consiste cette différence.

Ces questions ne peuvent être résolues que par l'examen des faits et leur discussion serait ici prématurée. Aussi n'avons-nous point l'intention de les discuter, mais simplement d'indiquer en peu de mots notre opinion, car il nous est indispensable de la formuler dès à présent.

Dans le dernier article, nous avons mentionné les propriétés communes à tous les atomes; mais la principale, l'étendue, reste indéterminée quant au volume et à la forme géométrique. Par suite, en faisant varier le volume ou la forme ou les deux à la fois, on peut concevoir un nombre illimité d'espèces d'atomes. De toutes ces espèces possibles, nous n'admettons que juste le nombre nécessaire pour expliquer les faits, et nous croyons que ce nombre peut se réduire à une ou deux espèces. Provisoirement, nous en reconnaissons deux, auxquelles nous attribuons la forme sphérique; mais les atomes de l'une ont un volume excessivement plus petit que les atomes de l'autre. L'ensemble des premiers constitue pour nous le fluide primordial ou l'éon, et l'ensemble des seconds le fluide éthéré.

31. Les corps simples des chimistes sont formés, non d'atomes élémentaires, mais de groupes d'atomes d'éther présidés par une monade. Ainsi les monades, ces êtres simples et actifs, destinés à peupler l'espace et à y répandre le mouvement et la vie, ont reçu de Dieu des natures diverses qui les constituent dans un certain ordre hiérarchique.

Au bas de l'échelle se trouvent des monades assujetties à occuper une portion d'espace qu'elles rendent impénétrable. Elles réalisent les atomes simples.

Au deuxième degré viennent se placer celles qui n'agissent pas directement sur l'étendue, mais sur les monades inférieures. Elles président un groupe d'atomes et sont chargées de maintenir sa forme et son volume. Ce groupe, avec son principe conservateur, correspond à l'élément des corps simples des chimistes; nous l'appellerons *atome chimique* ou *élément,* réservant le nom de *molécules* aux combinaisons d'éléments.

La formation des molécules ne requiert pas de principes actifs nouveaux et s'explique suffisamment par les lois de la Mécanique.

Mais, pour grouper des molécules nombreuses et les façonner en cellules organiques, il faut un nouvel ordre de monades supérieures. Ici j'arrive sur le seuil de la vie et je m'arrête, car je n'ai pas dessein de parler des forces vitales, mais seulement des forces qui dirigent les mouvements de la matière inanimée.

CHAPITRE II.

PRINCIPES DE MÉCANIQUE PHYSIQUE.

ARTICLE I.

Du mouvement. — Définitions qui s'y rattachent.

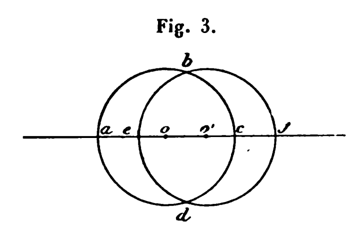
32. Le mouvement d'un corps ou d'un atome est l'acte par lequel ce corps ou cet atome change de lieu dans l'espace. En passant ainsi d'un lieu à un autre, le mobile occupe successivement toutes les positions intermédiaires et son mouvement est continu comme l'espace au sein duquel il s'opère.

On distingue dans les mouvements la direction et la vitesse. Au point de vue de la direction, ils se divisent en mouvements de translation et mouvements de rotation. Dans les premiers, tous les points du mobile décrivent des lignes parallèles et égales. Dans les seconds, ces mêmes points décrivent des arcs semblables autour d'un axe commun, dit axe de rotation. Ces deux sortes de mouvements simples peuvent d'ailleurs se combiner et donner lieu à des mouvements plus complexes.

Ces définitions, toutefois, ont besoin d'explications, surtout pour les atomes. Considérons, par exemple, un atome de forme sphérique qui a son centre en o (*fig.* 3) et qui se meut en ligne droite dans la direction of. Lorsque son centre est arrivé en o', pouvons-nous dire, suivant la définition du mouvement de translation, que tous ses points ont parcouru une longueur égale et parallèle à oo'? Non, ce langage ne serait pas exact. Dans l'atome, nous ne distinguons d'autres points que ceux de l'espace qu'il occupe. Or les points de l'espace sont immobiles; donc le mouvement de l'atome appartient uniquement à sa monade, qui retire son action de l'espace *bade* pour l'appliquer à l'espace *bcdf*. L'espace *bcde*,

commun aux deux sphères *o* et *o'*, n'a subi aucune modification intrinsèque par suite du mouvement. Il est vrai qu'au lieu de se trouver à droite, il se trouve à gauche de l'atome; mais ce changement de position, extrinsèque et purement relatif, ne l'affecte point en lui-même.

Fig. 3.



Ainsi donc, le mouvement de translation pour un atome consiste en ce que sa monade cesse d'agir d'un côté et transporte son action au côté opposé. Néanmoins, nous pouvons dire que le centre de l'atome se déplace et passe de *o* en *o'*, signifiant par là, non que le point *o* se transporte lui-même en *o'*, mais que les divers points de la ligne *oo'* servent successivement de centre à la sphère d'activité de la monade.

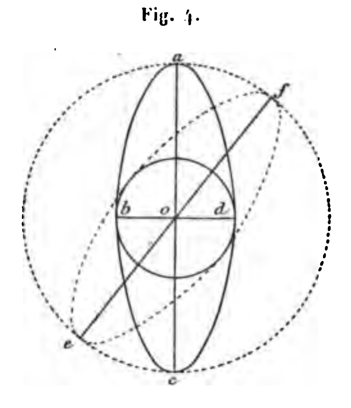
33. Pour le mouvement de rotation de l'atome, il peut être impossible en tout ou en partie.

Si, par exemple, l'atome est sphérique, il ne saurait en aucune sorte tourner autour de son centre. Sans doute, quand on le conçoit, avec les atomistes, comme formé de parties matérielles distinctes, on peut admettre un mouvement rotatoire de ces parties autour d'un axe central immobile. Mais, dans notre système, le mouvement de l'atome n'est possible que par un changement de lieu; car il n'y a pas de déplacement possible pour la monade au sein d'un espace qu'elle occupe identiquement de la même manière en tous ses points.

Si la forme de l'atome n'était pas sphérique, mais ellipsoïdale, *abcd* (*fig.* 4), un mouvement partiel de rotation pourrait s'effectuer autour du centre *o*. La sphère ayant pour diamètre le petit axe *ob* de l'ellipsoïde serait immobile, mais le surplus du volume occupé par la monade pourrait se déplacer et l'ellipsoïde passer en tournant de la position *ac* à la position *ef*.

Encore ce déplacement ne répond-il pas au mouvement de rotation défini plus haut; car ce ne sont pas véritablement des points de l'atome qui décrivent des arcs concentriques; c'est plutôt l'activité de la monade qui les parcourt. Cependant nous pouvons dire que le grand axe de l'atome tourne autour du centre *o*, signifiant par là non que l'axe *ac* se transporte en *ef*, mais que les diamètres du cercle de rayon *oa* deviennent successivement le grand axe de l'ellipsoïde.

Fig. 4.



Quant aux corps composés, nous pouvons admettre pour eux les définitions usuelles des mouvements de translation et de rotation, en entendant par points du mobile les atomes qui le forment réduits à leur centre.

34. *Vitesse.* — La vitesse est une qualité du mouvement relative à l'espace parcouru et au temps employé à le parcourir. La vitesse est dite constante, et le mouvement uniforme, lorsque le mobile parcourt des espaces égaux, dans des temps égaux, si petits qu'ils soient. Dans les autres cas, la vitesse est variable et le mouvement varié.

Une vitesse constante est dite 2, 3, 4 fois plus grande qu'une autre, lorsque, dans le même temps, elle fait parcourir au mobile des espaces 2, 3, 4 fois plus grands; ou bien lorsque, pour parcourir le même espace, le mobile emploie 2, 3, 4 fois moins de temps. Il s'ensuit que la vitesse varie en raison directe de l'espace parcouru et en raison inverse du

temps employé à le parcourir. On peut donc la représenter par la formule

$$v = \frac{e}{t},$$

où e désigne l'espace, t le temps, et la définir le rapport de l'espace au temps.

Quand la vitesse est variable, pour l'évaluer à un instant donné, on la regarde comme constante pendant le temps très court dt qui suit cet instant, et, en appelant de l'espace parcouru dans cet intervalle, on a, pour valeur de la vitesse,

$$v = \frac{de}{dt},$$

d'après la formule précédente.

Le mouvement varié est donc considéré comme une succession de mouvements uniformes, et ses différentes vitesses ne sont autres que les vitesses de tous ces mouvements successifs.

Dans le mouvement de rotation uniforme, on nomme *vitesse angulaire* la vitesse d'un point situé à l'unité de distance de l'axe de rotation et, en la désignant par ω, on trouve, pour la vitesse v d'un point situé à la distance r,

$$v = \omega r.$$

35. *Accélération.* — Lorsque la vitesse d'un mouvement varie avec le temps, on peut la concevoir représentée par une fonction du temps, de cette sorte,

$$v = f(t),$$

et l'on nomme accélération du mouvement, à un instant donné, le rapport

$$\frac{dv}{dt} = f'(t).$$

Si ce rapport est constant, le mouvement est dit uniformément varié.

Ces définitions, qui ne mettent en jeu que les idées de mouvement, d'espace et de temps, appartiennent à la *Ciné-*

matique pure et brillent aux yeux de notre esprit d'une grande clarté. Il en est de même des règles précises que cette science particulière nous trace pour composer et décomposer, soit les vitesses, soit les accélérations.

Mais la Mécanique proprement dite fait intervenir dans ses spéculations la notion de *force*, beaucoup plus obscure que les précédentes, non dans son concept général de cause de mouvement, mais dans sa nature intime et ses opérations. Nous consacrerons plus loin un article spécial à élucider cette notion.

36. *Masse.* — On rattache ordinairement l'idée de masse à celle de force, et l'obscurité de la seconde rejaillit sur la première; mais il nous semble préférable d'abandonner la définition commune de la masse et d'en donner une beaucoup plus simple, en rapport avec notre système sur la constitution de la matière.

Un atome, avons-nous dit, est composé d'un espace réel et d'une monade qui, par sa présence, rend cet espace impénétrable. Si, dans l'atome, nous faisons abstraction de la monade, pour ne considérer que l'étendue impénétrable, nous aurons proprement sa quantité de matière ou sa masse. Ainsi la masse d'un atome est mesurée par son volume et la masse d'une molécule ou d'un corps quelconque par la somme des volumes de ses atomes.

En conséquence, la masse d'un atome diffère de cet atome comme le corps d'un homme diffère de cet homme et, de même que le corps vivant est inséparable de l'âme, qui le vivifie, la masse d'un atome est inséparable de la monade, qui lui donne son caractère propre, l'impénétrabilité.

37. *Densité.* — Si l'on désigne par M la masse d'un corps et par V son volume apparent, le quotient $\frac{M}{V}$ est la densité absolue de ce corps; d'où l'on voit que la densité absolue est égale à l'unité pour les atomes et varie de 0 à 1 pour tous les corps.

Le rapport des densités de deux corps ayant même volume apparent est égal au rapport des masses; car, si l'on désigne

par D′, D″ leurs densités absolues, par M′, M″ leurs masses et par V leur volume apparent, on a

$$\frac{D'}{D''} = \frac{M'}{V} : \frac{M''}{V} = \frac{M'}{M''}.$$

Si l'on prenait D″ pour unité de densité et M″ pour unité de masse, la densité relative du premier corps serait mesurée par le même nombre que sa masse.

38. *Quantité de mouvement.* — Le produit mv de la masse m d'un atome par la vitesse v qui l'anime est ce qu'on appelle sa *quantité de mouvement.* Si tous les atomes d'un corps de masse M ont une vitesse V de même grandeur et de même direction, la quantité de mouvement de ce corps est MV.

Dans le cas où les vitesses des atomes qui forment un groupe seraient inégales, tout en conservant la même direction, la quantité de mouvement du groupe serait représentée par Σmv.

Si l'on voulait estimer la quantité de mouvement d'un système d'atomes, ayant des vitesses dirigées en différents sens, il faudrait préciser la direction suivant laquelle on l'estimerait, et multiplier la masse de chaque atome par la composante de sa vitesse suivant la direction déterminée. La quantité de mouvement du système serait représentée par $\Sigma mv \cos\alpha$ et changerait, en général, avec la direction choisie. Comme l'angle α peut varier de 0° à 180°, les éléments de la somme Σ peuvent être négatifs aussi bien que positifs et s'annuler entre eux.

39. *Action.* — On appelle *action d'un atome,* pendant le temps t, le produit de la quantité de mouvement mv par l'espace parcouru vt, c'est-à-dire l'expression mv^2t, lorsque le mouvement est uniforme. Lorsqu'il est varié, l'action dans l'intervalle $t - t_0$ est mesurée par l'intégrale $\int_{t_0}^{t} mv^2\,dt$, et, s'il s'agit d'un groupe quelconque d'atomes, elle est représentée par l'expression plus complexe $\Sigma\int_{t_0}^{t} mv^2\,dt$, le signe $\int$

étant pris pour chaque atome et le signe Σ pour tous les atomes du groupe.

40. *Force vive* ([1]). — La force vive, qui serait plus justement nommée la *vivacité de la force*, est le rapport de l'action au temps ou la vitesse de l'action. Puisque l'action d'un atome animé d'un mouvement uniforme est constante et égale à mv^2t, sa force vive est aussi constante et égale à mv^2. Dans le cas où la vitesse et par suite l'action est variable, on peut néanmoins, pendant le temps très court Δt, la supposer constante et égale à $mv^2\Delta t$, et la force vive à cet instant est encore mv^2, en sorte qu'à chaque instant elle est proportionnelle au carré de la vitesse. La force vive, comme l'action, est indépendante de la direction des vitesses. Par suite, la force vive d'un système quelconque est égale à la somme des forces vives de tous ses atomes, soit Σmv^2.

41. *Force constante.* — Sans nous prononcer ici sur la réalité physique des forces constantes, nous dirons qu'on donne ce nom à des causes capables de communiquer à un mobile des accroissements égaux de vitesse dans des temps égaux, quelque petits que soient ces temps. Par suite, si le mobile a une vitesse v_0 à l'instant où la force constante F commence à agir, sa vitesse, au bout du temps t, sera $v = v_0 + \gamma t$.

On démontre qu'une telle force est proportionnelle à la masse m du mobile et à l'accélération γ qu'elle lui communique et l'on prend le produit $m\gamma$ pour expression de sa mesure.

42. *Travail.* — Le mot de *travail* désigne, en Mécanique, le produit d'une force constante F par la longueur l que parcourt son point d'application, lorsque les directions de la force et du chemin parcouru coïncident. Si ces directions font un angle constant α, le travail $T = Fl\cos\alpha$.

Si la force F ou l'angle α, ou tous les deux ensemble, varient dans le temps t, on décompose ce temps en intervalles

---

([1]) Nous donnons ici une définition de mots, sans rien préjuger sur le vrai sens du mot *force*, que nous expliquerons plus loin.

assez petits pour qu'on puisse considérer F et α comme constants dans chaque intervalle, et le travail total est représenté par la somme des travaux élémentaires correspondants.

43. *Énergie.* — Lorsqu'une force constante F agit pendant le temps t sur un mobile de masse m, primitivement au repos, on a les formules suivantes :

$$v = \gamma t, \quad l = \tfrac{1}{2}\gamma t^2, \quad F = m\gamma, \quad T = Fl = \tfrac{1}{2} mv^2.$$

Ainsi, dans ce cas, le travail est égal à la moitié de la force vive.

Comme cette quantité $\frac{1}{2}mv^2$ se rencontre souvent dans les calculs et offre une signification précise, indépendamment de la notion de travail, on lui a donné le nom particulier d'*énergie*. Nous reparlerons plus loin de l'énergie, et nous en distinguerons deux espèces.

ARTICLE II.

Lois fondamentales de la nature.

44. L'expérience n'atteint pas directement les atomes et les molécules; mais elle nous manifeste, dans les phénomènes sensibles, certaines lois générales qui, pour s'appliquer aux corps perçus par nos sens, doivent aussi convenir à leurs derniers éléments. Telles sont :

1° *La loi de conservation des masses.* — Toutes les analyses de la Chimie, soit organique, soit minérale, concourent à établir ce fait que, au milieu des transformations les plus variées, la masse des substances demeure fixe. Les pressions énormes auxquelles on a soumis divers corps n'ont jamais entraîné une diminution de masse, et nous pouvons en inférer qu'aucune pression n'est assez puissante pour faire varier le volume réel des atomes. La monade chargée de maintenir l'invariabilité de ce volume jouit en conséquence d'une force de résistance illimitée.

2° *La loi d'inertie.* — Cette loi, découverte par Kepler, consiste dans la proposition suivante :

Un corps soustrait à toute influence étrangère, ou bien de-

meure en repos, ou bien se meut d'un mouvement rectiligne uniforme.

Évidemment, cette loi constatée sur les corps sensibles a son fondement dans la propriété d'inertie que nous avons accordée aux éléments matériels, et il n'est pas nécessaire d'insister sur ce point.

3° *La loi ou le principe d'égalité entre l'action et la réaction.* — Ce principe, dû à Newton, n'est pas facile à énoncer de manière à satisfaire en même temps ceux qui affirment et ceux qui nient les actions à distance. Dans son *Traité de Mécanique générale* (¹), M. Resal le formule de cette sorte :

« *Si deux points matériels m, m' exercent l'un sur l'autre une certaine action, cette action est dirigée suivant la droite qui les joint, et l'action attractive ou répulsive exercée par m sur m' est égale et de sens contraire à celle (réaction) de m' sur m.* »

Cet énoncé insinue des attractions ou répulsions à distance, et, pour le mettre en rapport avec notre système, nous le modifierons comme il suit :

Si deux atomes viennent à se rencontrer, ils exercent l'un sur l'autre une action dirigée suivant la normale au point d'impact, et si l'on estime les quantités de mouvement des deux atomes suivant cette normale à un instant quelconque du choc, la quantité de mouvement gagnée par l'un égale toujours la quantité perdue par l'autre.

Comme le phénomène du choc n'est pas instantané, il est possible que, pendant sa durée, si courte qu'elle soit, le point d'impact varie; mais l'énoncé n'en subsiste pas moins, et les variations infiniment petites des quantités de mouvement, estimées à chaque instant suivant la normale qui correspond à cet instant, sont toujours égales et contraires. Il en résulte que le principe de la réaction égale à l'action entraîne la conservation des quantités de mouvement dans le choc, et comme, d'après la loi d'inertie, les vitesses demeurent constantes en

---

(¹) Resal, *Traité de Mécanique générale*, t. I, p. 36.

dehors du choc, la conservation des quantités de mouvement est assurée en tout état de choses.

4° *La loi d'indépendance des mouvements.* — Cette loi, découverte par Galilée, peut s'énoncer : *Le mouvement commun à divers corps n'influe pas sur leurs mouvements particuliers.* Si l'on entendait dire simplement par là que les positions relatives de deux corps, sans action l'un sur l'autre, ne sont pas modifiées par suite d'un mouvement commun, la proposition serait presque évidente. Mais on étend le principe, non seulement aux rapports de position, mais aux rapports d'action, et alors c'est l'expérience qui nous montre sa généralité.

Une conséquence de cette loi est que les rapports de deux atomes ne sont pas modifiés si l'on ajoute ou retranche à chacun d'eux une vitesse commune, c'est-à-dire une vitesse égale et de même sens.

ARTICLE III.

Lois du choc.

Dans notre système, où toutes les modifications de mouvement résultent des rencontres des atomes, la recherche des lois du choc est le problème fondamental de la Mécanique. Voilà pourquoi nous développerons cet article beaucoup plus que les autres, et nous le subdiviserons en trois paragraphes, consacrés : le premier au choc direct de deux atomes, le deuxième au choc oblique de deux atomes, et le troisième au choc simultané de plusieurs atomes.

§ I. — *Choc direct de deux atomes.*

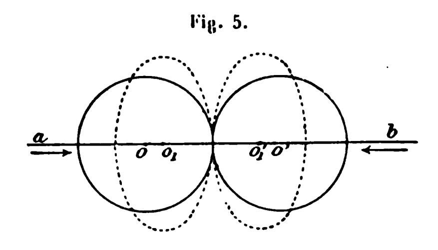
Le choc est direct lorsque les atomes qui se rencontrent se meuvent suivant la ligne de leurs centres; il est oblique dans le cas contraire.

45. *Choc direct de deux atomes égaux, animés de vitesses égales.* — Commençons par le cas le plus simple, celui où deux atomes égaux se dirigent l'un vers l'autre avec des vitesses égales et contraires. A l'instant où ils arrivent au contact, ils s'op-

posent une résistance mutuelle à cause de leur impénétrabilité S'ils étaient absolument durs, leurs vitesses seraient instantanément détruites; mais ils sont élastiques, et, conformément à la loi de continuité, leurs vitesses diminuent insensiblement jusqu'à zéro, en restant toujours égales et contraires.

Soient o et o' (*fig.* 5) les positions de leurs centres au com-

Fig. 5.



mencement du choc; ils continuent à se rapprocher en s'avançant l'un vers l'autre jusqu'en o_1, o'_1, par exemple. Pendant ce rapprochement, les atomes se contractent parallèlement et se dilatent perpendiculairement à la ligne des centres; les formes nouvelles qu'ils revêtent ainsi sont des surfaces de révolution autour de cette ligne, puisque tout est symétrique autour d'elle. D'autre part, la résistance des monades à la déformation de leur lieu exige que ces surfaces s'éloignent le moins possible de la forme sphérique. Ce sont donc des ellipsoïdes. Ainsi les deux sphères atomiques deviennent par le choc deux ellipsoïdes de révolution autour de leur petit axe, et cet axe diminue tant que les centres se rapprochent, c'est-à-dire jusqu'à ce que les vitesses soient devenues égales à zéro.

A ce moment se termine la première phase du choc. La force vive des mobiles a entièrement disparu; mais, en se dépensant, elle a produit dans les atomes un effet mécanique équivalent. Par suite de l'aplatissement, ils sont tous les deux comme un ressort tendu, et la détente, en les ramenant à leur forme primitive, va leur restituer la force vive perdue.

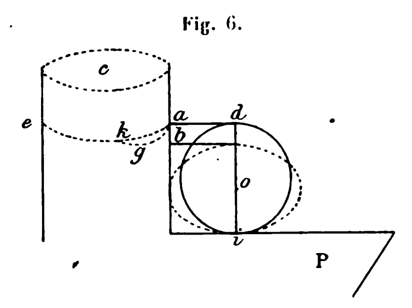
Examinons, en effet, la seconde phase du choc. Au moment où les mouvements de translation s'éteignent, l'élasticité ou la force de ressort développée dans les atomes par la déformation agit pour les ramener à la forme sphérique. Si alors l'un des atomes s'évanouissait, l'autre reprendrait sa forme

sans déplacement de son centre. Mais la présence simultanée des deux atomes et leur impénétrabilité font que tout allongement du petit axe est impossible du côté du point de contact. L'effet de la détente doit donc se produire tout entier des deux côtés opposés au contact. Il s'ensuit que les centres o_1, o'_1 prennent un mouvement dans les directions $o_1 a$, $o'_1 b$, et les atomes subissent en sens inverse, dans cette seconde période du choc, toutes les transformations de la première. Lors donc qu'ils achèvent de reprendre la forme sphérique, ils sont animés de vitesses égales et contraires à celles qu'ils possédaient auparavant.

46. Le mouvement des atomes, uniforme avant et après le choc, est varié pendant sa durée ; mais la loi de cette variation nous est inconnue. En admettant que le choc des atomes soit soumis aux mêmes lois que le choc des billes élastiques, on pourrait essayer des expériences en vue de déterminer la nature du mouvement en question, et nous pensons que nos expérimentateurs modernes, si habiles, parviendraient à un résultat satisfaisant. Nous nous permettrons d'indiquer ici un mode d'expérimentation.

Concevons un cylindre vertical *c* (*fig.* 6), dont la surface

Fig. 6.



latérale est revêtue de papier, un plan de marbre horizontal P, une bille élastique *o* reposant sur ce plan au point *i* et portant à l'extrémité du diamètre vertical *id* un crayon *da* dont la pointe appuie sur le cylindre, à la hauteur du cercle *ae*.

Si on laisse tomber la bille d'une hauteur *h* et qu'on puisse réaliser la chute au moyen de certaines précautions, de ma-

nière qu'elle touche le plan P juste dans la position représentée, le diamètre *di* se raccourcira dans la première phase du choc et le crayon *da* marquera sur le cylindre un trait *ab*, dont la longueur donnera la mesure de l'aplatissement.

Si l'on suppose, en outre, que le cylindre soit animé d'un mouvement rapide de rotation, au lieu du trait *ab*, le crayon tracera sur le cylindre, au-dessous du cercle *ae*, une courbe *agk*.

L'arc de cercle *ak* mesurera la durée du choc. Si R est le rayon du cylindre et n le nombre de tours décrits par seconde, cette durée sera une fraction de seconde égale à $\frac{ak}{2\pi R . n}$. D'autre part, l'étude de la courbe *agk* fera connaître, à chaque instant du choc, le rapport entre l'espace parcouru et le temps employé à le parcourir, et, par suite, déterminera la loi du mouvement varié pendant le choc.

47. *Choc direct de deux atomes quelconques, animés de vitesses quelconques.* — Soient

m et m' les masses des deux atomes;
v et v' leurs vitesses avant le choc;
w et w' leurs vitesses variables pendant le choc.

La loi de conservation des quantités de mouvement donne l'équation

$$mw + m'w' = mv + m'v'.$$

Les deux atomes se compriment jusqu'à ce que leurs vitesses aient acquis la même valeur u, et alors l'équation précédente devient

$$(m + m')u = mv + m'v',$$

d'où

$$u = \frac{mv + m'v'}{m + m'}.$$

Si l'on suppose v et v' de même sens et $v > v'$, on voit que, dans la première phase du choc, m a perdu en vitesse $v - u$ et m' a gagné $u - v'$.

Dans la seconde phase, cette perte et ce gain sont doublés; car les forces de ressort développées par la compression,

étant égales dans les deux atomes, s'annulent du côté du point de contact et leur effet mécanique tend à écarter les deux centres. La vitesse de m se trouve donc encore diminuée et celle de m' augmentée, et, comme la détente doit produire le même effet que la tension, les vitesses V et V' de m et m' sont, à la fin du choc,

$$V = v - 2(v - u) = 2u - v$$

et

$$V' = v' + 2(u - v') = 2u - v'$$

ou

$$V = \frac{2m'v' - (m' - m)v}{m + m'} \quad \text{et} \quad V' = \frac{2mv - (m - m')v'}{m + m'}.$$

On prouverait aisément que ces formules qui donnent les vitesses après le choc sont générales, quels que soient le sens et la grandeur de v et de v'.

Observons aussi que les surfaces des atomes pendant le choc sont, comme dans le cas précédent et pour les mêmes raisons, des ellipsoïdes de révolution autour de la ligne des centres.

Si nous calculons la force vive du système des deux atomes après le choc, nous trouvons

$$mV^2 + m'V'^2 = mv^2 + m'v'^2 + 4u[(m + m')u - (mv + m'v')]$$
$$= mv^2 + m'v'^2.$$

Donc elle est la même qu'avant le choc.

§ II. — *Choc oblique de deux atomes.*

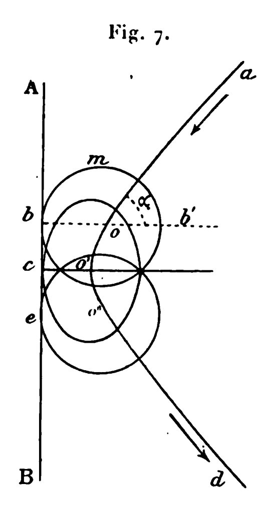
48. Lorsque deux atomes se choquent obliquement, le point de contact et la direction de la ligne des centres ne sont plus invariables, comme dans le choc direct. Par suite, outre les mouvements de déformation dont nous pouvons nous faire une idée d'après le § I, il y a, dans le choc oblique, une particularité qui lui est propre : c'est le changement de direction du mouvement. Comme la loi de continuité s'oppose à ce qu'il soit brusque, il faut que, durant le choc, les centres des atomes en collision décrivent de petits

arcs pour ménager la transition entre la direction qui précède et celle qui suit le choc.

Afin de déterminer la courbe décrite, il faudrait connaître la nature du mouvement varié qui a lieu pendant le choc, et nous l'ignorons. Cependant, pour nous faire une idée de la manière dont s'opère ce changement de direction, nous allons étudier plus en détail trois cas particuliers très simples.

Supposons d'abord un atome m (*fig.* 7), qui se meut le

Fig. 7.



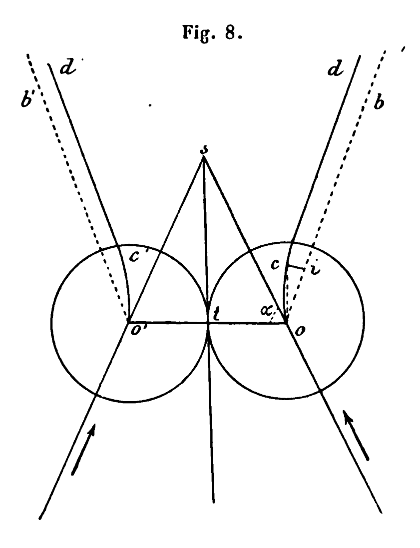
long de la droite ao, avec la vitesse v, et qui vient heurter le plan fixe AB. Au moment où il touche le plan en b, il éprouve une résistance suivant bo, et si nous décomposons sa vitesse v en deux autres, $v\cos\alpha$ et $v\sin\alpha$, la première normale et la deuxième parallèle à AB, la composante $v\sin\alpha$ conservera toute sa valeur, et la composante $v\cos\alpha$ décroîtra jusqu'à zéro par la résistance du plan. Cette décroissance est accompagnée de la déformation de l'atome qui se comprime de plus en plus. Pendant ce temps, le centre o, animé d'une vitesse variable, décrit le petit arc oo'. Ce serait un arc parabolique si la composante normale variait proportionnellement au temps.

Quand le centre de l'atome est arrivé en o', au point le plus

bas de la courbe, il ne possède plus que la vitesse $v \sin \alpha$ parallèle à AB; mais aussi la déformation ou la tension est à son maximum, et, à partir de cet instant, la force élastique agit pour rendre à l'atome sa forme sphérique et éloigner son centre de AB. La vitesse détruite dans le sens *ob*, pendant la première période du choc, est donc restituée dans le sens *ob'* pendant la deuxième, et, lorsque l'atome a repris sa forme en *o''*, son centre est animé des deux vitesses $v \sin \alpha$, $-v \cos \alpha$, et il s'éloigne dans la direction *o''d* symétrique de *oa* par rapport à l'axe *co'*. Pendant le choc, le point de contact a parcouru sur le plan la longueur *be*, et le petit axe de l'ellipsoïde de contraction a été constamment normal à cette droite.

49. Examinons en second lieu le choc de deux atomes *o*, *o'*, animés d'une même vitesse *v* dans les directions *os* et *o's* qui

Fig. 8.



se coupent en *s*. Supposons, de plus, qu'à l'instant où ils commencent à se toucher en *t*, *os* égale *o's*, et désignons par α l'angle *sot*. Pendant la durée du choc, le point de contact glisse le long de *st* avec une vitesse $v \sin \alpha$ et la ligne des centres *oo'* reste constamment perpendiculaire à la tangente commune *st*. Cette droite joue ici le rôle du plan fixe dans le cas

précédent, et la résistance de ce plan est remplacée par la réaction des deux atomes l'un contre l'autre. Le centre de chacun d'eux décrit donc, comme tout à l'heure, un petit arc pendant le choc, et finalement s'éloigne de *st* avec la vitesse v en faisant un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence.

Si nous menons *ob*, *o'b'* parallèles aux directions *cd*, *c'd'* des vitesses réfléchies, ces droites seront distantes d'une longueur

$$ci = co \cos\alpha;$$

mais, en appelant τ la durée du choc

$$co = v \sin\alpha . \tau;$$

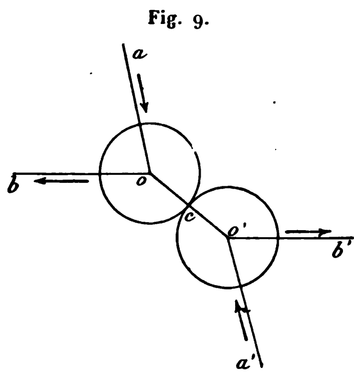
donc

$$ci = v \sin\alpha \cos\alpha . \tau,$$

et, comme tout porte à croire que le produit $v\tau$ est excessivement petit, les deux parallèles *ob* et *cd* se confondent sensiblement, et l'on peut, sans erreur appréciable, supposer le choc instantané.

50. Considérons encore le choc de deux atomes égaux o, o', animés de vitesses égales, parallèles et de sens contraire, v et v'.

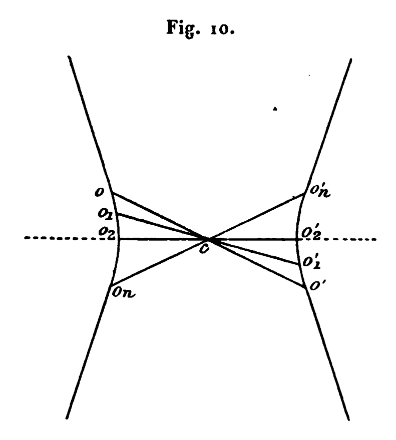
Fig. 9.



Soient *ao*, *a'o'* (*fig.* 10) les directions des vitesses avant le choc, et *c* le point de contact. Si le choc était instantané, les atomes se réfléchiraient immédiatement l'un sur l'autre, suivant *ob* et *o'b'*, en faisant avec la normale *oo'* des angles égaux

à ceux d'incidence; mais la loi de continuité s'y oppose. Le choc dure, et, pendant sa durée, les centres o et o' se rapprochent d'abord pour s'éloigner ensuite. D'ailleurs le point de contact c reste immobile, parce qu'il n'y a pas plus de raison pour qu'il se déplace d'un côté que de l'autre.

Fig. 10.



La ligne des centres oo' prend donc successivement les positions $o_1o'_1$, $o_2o'_2$, ..., $o_no'_n$, et les centres décrivent deux courbes $o'o'_n$, oo_n, symétriques par rapport au point c. La bissectrice $o_2o'_2$ de l'angle formé par les deux positions extrêmes oo', $o_no'_n$ répond au maximum de contraction des deux atomes, et elle est un axe de symétrie pour les deux courbes décrites, comme pour les directions du mouvement avant et après le choc.

Ainsi, les angles de réflexion sont égaux aux angles d'incidence, non par rapport à oo', normale au début du choc, mais par rapport à $o_2o'_2$, normale au milieu du choc.

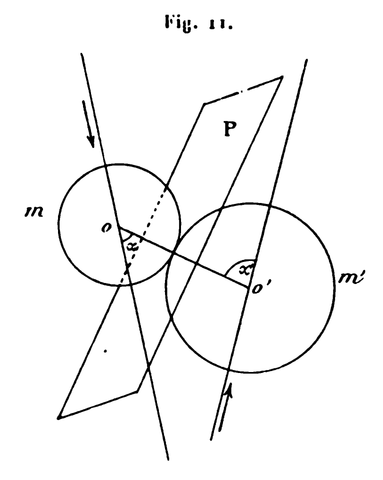
Nous avons mentionné les arcs décrits pendant le choc oblique pour maintenir l'exactitude absolue de la loi de continuité; mais ces arcs sont tellement petits et la variation qui en résulte dans la direction du mouvement réfléchi est tellement faible, que nous nous dispenserons à l'avenir d'en tenir compte.

51. C'est ce que nous allons faire en établissant les formules

générales du choc oblique de deux atomes de masses m, m', animés de vitesses v, v', dans des directions quelconques.

On peut alors remplacer chacune de ces vitesses par deux composantes rectangulaires dirigées, l'une suivant la ligne des centres oo' (*fig.* 11) et l'autre suivant une parallèle au plan

Fig. 11.



tangent commun P. Soient u et u' les composantes parallèles au plan P; v et v' les composantes normales à ce plan. Ces deux dernières agiront seules dans le choc et se transformeront en deux autres

$$w = \frac{2(m\mathrm{v} + m'\mathrm{v}')}{m + m'} - \mathrm{v}, \quad w' = \frac{2(m\mathrm{v} + m'\mathrm{v}')}{m + m'} - \mathrm{v}'.$$

Enfin les résultantes définitives après le choc, V, V' seront données par les équations

$$\mathrm{V} = \sqrt{w^2 + u^2}, \quad \mathrm{V}' = \sqrt{w'^2 + u'^2}.$$

En employant les angles α et α', que font les directions de v et v' avec la ligne des centres, on a

$$u = v \sin\alpha, \quad \mathrm{v} = v\cos\alpha, \quad u' = v' \sin\alpha', \quad \mathrm{v}' = v'\cos\alpha'.$$

Par suite V et V' sont déterminés en fonctions de v, v', α et α'.

Si, de plus, on suppose $m = m'$, $w = v' \cos\alpha'$, $w' = v\cos\alpha$, et l'on a les formules très simples

$$V = \sqrt{v^2 \sin^2\alpha + v'^2 \cos^2\alpha'}, \quad V' = \sqrt{v^2 \cos^2\alpha + v'^2 \sin^2\alpha'}.$$

D'ailleurs les nouvelles directions de m et m' sont situées dans les plans que forment leurs premières directions avec la normale oo', et les angles 6, $6'$ qu'elles font avec cette ligne sont donnés par les relations $\cos 6 = \frac{w}{V}$, $\cos 6' = \frac{w'}{V'}$.

Si l'on calcule la force vive du système après le choc, on trouve

$$mV^2 + m'V'^2 = m(w^2 + u^2) + m'(w'^2 + u'^2) = mv^2 + m'v'^2.$$

Elle est la même qu'avant le choc.

§ III. — *Choc oblique simultané de plusieurs atomes* (¹).

52. On conçoit qu'un grand nombre d'atomes peuvent se choquer simultanément dans des directions quelconques, et alors se présente cette question : *Connaissant les masses de ces atomes, ainsi que les vitesses et les directions de leur mouvement avant le choc, déterminer leurs vitesses et leurs directions après le choc.* Ce problème est très compliqué et nous ne l'examinerons pas sous toutes ses faces. Nous le résoudrons dans un cas seulement; mais ce cas, du reste assez général, est le seul dont nous ayons à nous préoccuper pour les calculs à venir.

Soit donc une sphère élastique de masse M choquée simultanément par d'autres sphères élastiques de masses m_1, m_2, m_3, ..., m_n dans des directions et avec des vitesses quelconques. Il s'agit de trouver la vitesse et la direction du mouvement de M après le choc, connaissant cette vitesse et cette direction avant le choc.

Rapportons toutes les quantités en question à trois axes rectangulaires ayant pour origine le centre de M au moment

(¹) J'ai publié les formules du choc simultané en 1876 dans le journal *les Mondes*, t. XLI, p. 637.

du choc. Soient V et V′, X, Y, Z et X′, Y′, Z′ les vitesses de M avant et après le choc et les cosinus des angles que font leurs directions avec les axes. Soient de même $v_1, v_2, \ldots, v_n$ et $v'_1, v'_2, \ldots, v'_n$ les composantes normales des vitesses de m_1, $m_2, \ldots, m_n$ avant et après le choc, et x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; …; x_n, y_n, z_n les cosinus des angles que font les directions de ces vitesses avec les axes. Les composantes tangentielles des vitesses de $m_1, m_2, \ldots$ n'ont aucune influence sur les effets du choc, et nous pouvons en faire abstraction dans les raisonnements qui vont suivre :

Le principe de la conservation des quantités de mouvement nous donne les trois équations

$$(a)\qquad \begin{cases} MVX + \Sigma mvx = MV'X' + \Sigma mv'x, \\ MVY + \Sigma mvy = MV'Y' + \Sigma mv'y, \\ MVZ + \Sigma mvz = MV'Z' + \Sigma mv'z, \end{cases}$$

dans lesquelles

$$\Sigma mvx = m_1 v_1 x_1 + m_2 v_2 x_2 + \ldots + m_n v_n x_n,$$
$$\Sigma mvy = m_1 v_1 y_1 + m_2 v_2 y_2 + \ldots + m_n v_n y_n,$$
$$\Sigma mv'x = m_1 v'_1 x_1 + m_2 v'_2 x_2 + \ldots + m_n v'_n x_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

D'autre part, au milieu du choc, les composantes de la vitesse de M sont

$$\tfrac{1}{2}(VX + V'X'),\ \tfrac{1}{2}(VY + V'Y'),\ \tfrac{1}{2}(VZ + V'Z').$$

Par suite, cette vitesse elle-même est

$$\begin{aligned} W &= \tfrac{1}{2}\sqrt{(VX+V'X')^2 + (VY+V'Y')^2 + (VZ+V'Z')^2} \\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{V^2 + V'^2 + 2VV'(XX' + YY' + ZZ')}, \end{aligned}$$

et si nous désignons par ξ, η, ζ les cosinus des angles que sa direction fait avec les axes, nous aurons

$$\xi = \frac{VX + V'X'}{2W},\quad \eta = \frac{VY + V'Y'}{2W},\quad \zeta = \frac{VZ + V'Z'}{2W}.$$

A cet instant du choc, les vitesses normales de $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sont aussi

$$\tfrac{1}{2}(v_1 + v'_1),\ \tfrac{1}{2}(v_2 + v'_2),\ \ldots,\ \tfrac{1}{2}(v_n + v'_n),$$

et comme elles doivent être égales à la vitesse de M projetée sur leur direction, on a, pour exprimer cette égalité, les n équations suivantes :

$$(b)\quad \begin{cases} W(\xi x_1 + \eta y_1 + \zeta z_1) = \frac{1}{2}(v_1 + v'_1), \\ W(\xi x_2 + \eta y_2 + \zeta z_2) = \frac{1}{2}(v_2 + v'_2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ W(\xi x_n + \eta y_n + \zeta z_n) = \frac{1}{2}(v_n + v'_n). \end{cases}$$

Si l'on multiplie les deux termes de la première par $m_1 x_1$, les deux termes de la seconde par $m_2 x_2$, et ainsi de suite, et qu'on ajoute membre à membre les équations ainsi multipliées, on obtiendra

$$(VX + V'X')\Sigma mx^2 + (VY + V'Y')\Sigma mxy + (VZ + V'Z')\Sigma mxz$$
$$= \Sigma mvx + \Sigma mv'x$$

en posant

$$\Sigma mx^2 = m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + \dots + m_n x_n^2,$$
$$\Sigma mxy = m_1 x_1 y_1 + m_2 x_2 y_2 + \dots + m_n x_n y_n,$$
$$\Sigma mxz = m_1 x_1 z_1 + m_2 x_2 z_2 + \dots + m_n x_n z_n.$$

On obtiendra deux autres équations analogues en multipliant les deux termes des équations (b) par des facteurs qui ne diffèrent des précédents qu'en ce que la lettre x sera remplacée successivement par y et z, et en ajoutant les produits membre à membre. On aura donc, en fin de compte, le système des trois équations

$$(c)\quad \begin{cases} (VX + V'X')\Sigma mx^2 + (VY + V'Y')\Sigma mxy + (VZ + V'Z')\Sigma mxz \\ \quad = \Sigma mvx + \Sigma mv'x, \\ (VX + V'X')\Sigma mxy + (VY + V'Y')\Sigma my^2 + (VZ + V'Z')\Sigma myz \\ \quad = \Sigma mvy + \Sigma mv'y, \\ (VX + V'X')\Sigma mxz + (VY + V'Y')\Sigma myz + (VZ + V'Z')\Sigma mz^2 \\ \quad = \Sigma mvz + \Sigma mv'z. \end{cases}$$

Ces équations donneront les valeurs de $\Sigma mv'x$, $\Sigma mv'y$, $\Sigma mv'z$, et, en portant ces valeurs dans le système (a), nous aurons trois équations du premier degré entre les trois composantes $V'X'$, $V'Y'$, $V'Z'$ de la vitesse de M après le choc. Il

sera donc facile de déterminer ces composantes, et par suite la vitesse elle-même et sa direction.

Mais les calculs peuvent être simplifiés par un choix convenable des axes. Supposons les masses $m_1, m_2, \ldots, m_n$ concentrées à leur point de contact avec M, et prenons pour axes des coordonnées les axes principaux d'inertie du système de toutes ces masses ainsi concentrées. Comme les cosinus $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2, \ldots$ sont proportionnels aux coordonnées des points de contact, nous aurons alors $\Sigma mxy = 0$, $\Sigma mxz = 0$, $\Sigma myz = 0$, et les équations (c) simplifiées deviendront

$$\begin{aligned}
(\mathrm{VX}+\mathrm{V'X'})\Sigma mx^2 &= \Sigma mvx + \Sigma mv'x,\\
(\mathrm{VY}+\mathrm{V'Y'})\Sigma my^2 &= \Sigma mvy + \Sigma mv'y,\\
(\mathrm{VZ}+\mathrm{V'Z'})\Sigma mz^2 &= \Sigma mvz + \Sigma mv'z.
\end{aligned}$$

Si l'on tire de ces équations les valeurs de $\Sigma mv'x$, $\Sigma mv'y$, $\Sigma mv'z$ pour les transporter dans le système (a), nous aurons

$$\begin{aligned}
\mathrm{MVX} + 2\Sigma mvx &= \mathrm{MV'X'} + (\mathrm{VX}+\mathrm{V'X'})\Sigma mx^2,\\
\mathrm{MVY} + 2\Sigma mvy &= \mathrm{MV'Y'} + (\mathrm{VY}+\mathrm{V'Y'})\Sigma my^2,\\
\mathrm{MVZ} + 2\Sigma mvz &= \mathrm{MV'Z'} + (\mathrm{VZ}+\mathrm{V'Z'})\Sigma mz^2,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\mathrm{V'X'} &= \frac{\mathrm{VX}(\mathrm{M} - \Sigma mx^2) + 2\Sigma mvx}{\mathrm{M} + \Sigma mx^2},\\
\mathrm{V'Y'} &= \frac{\mathrm{VY}(\mathrm{M} - \Sigma my^2) + 2\Sigma mvy}{\mathrm{M} + \Sigma my^2},\\
\mathrm{V'Z'} &= \frac{\mathrm{VZ}(\mathrm{M} - \Sigma mz^2) + 2\Sigma mvz}{\mathrm{M} + \Sigma mz^2}.
\end{aligned}$$

Pour $m_x = \Sigma mx^2$ et $u_x = \dfrac{\Sigma mvx}{\Sigma mx^2}$, $m_y = \Sigma my^2, \ldots$, ces formules deviennent

$$\begin{aligned}
\mathrm{V'X'} &= \frac{\mathrm{VX}(\mathrm{M} - m_x) + 2m_x u_x}{\mathrm{M} + m_x},\\
\mathrm{V'Y'} &= \frac{\mathrm{VY}(\mathrm{M} - m_y) + 2m_y u_y}{\mathrm{M} + m_y},\\
\mathrm{V'Z'} &= \frac{\mathrm{VZ}(\mathrm{M} - m_z) + 2m_z u_z}{\mathrm{M} + m_z}.
\end{aligned}$$

Or, si les masses M et m_x se choquent normalement avec les vitesses VX et u_x, la vitesse de M après le choc sera précisément V'X'. De même le choc normal de M et m_y avec les vitesses VY et u_y ou de M et m_z avec les vitesses VZ et u_z donnera les composantes V'Y' et V'Z'.

Donc le choc simultané en question peut se ramener à trois chocs simples normaux, dirigés suivant les axes principaux d'inertie du système des masses $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

La connaissance des trois composantes V'X', V'Y', V'Z', jointe à la relation

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = 1,$$

détermine complètement V' en grandeur et en direction.

Le système des équations (b) détermine aussi $v'_1, v'_2, \ldots, v'_n$. En effet, la première donne

$$v'_1 = (VX + V'X')x_1 + (VY + V'Y')y_1 + (VZ + V'Z')z_1 - v_1$$

et les valeurs de $v'_2, v'_3, \ldots, v'_n$ se déduiraient de celles de v'_1, en remplaçant l'indice 1 successivement par les indices 2, 3, ..., n.

La combinaison des vitesses normales $v'_1, v'_2, \ldots, v'_n$ et des composantes tangentielles qui n'ont pas varié pendant le choc donnerait en grandeur et en direction les vitesses résultantes de $m_1, m_2, \ldots, m_n$ après le choc.

53. Calculons encore la force vive du système après le choc, et pour simplifier les notations, posons

$$\Sigma mx^2 = a, \quad \Sigma my^2 = b, \quad \Sigma mz^2 = c,$$
$$2\Sigma mvx = d, \quad 2\Sigma mvy = e, \quad 2\Sigma mvz = f.$$

Nous aurons alors

$$V'^2 = \left[\frac{VX(M-a)+d}{M+a}\right]^2 + \left[\frac{VY(M-b)+e}{M+b}\right]^2 + \left[\frac{VZ(M-c)+f}{M+c}\right]^2,$$

$$v'_1 = \frac{2MVX+d}{M+a}x_1 + \frac{2MVY+e}{M+b}y_1 + \frac{2MVZ+f}{M+c}z_1 - v_1,$$

$$v'_2 = \frac{2MVX+d}{M+a}x_2 + \frac{2MVY+e}{M+b}y_2 + \frac{2MVZ+f}{M+c}z_2 - v_2.$$

. . . .

Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
MV'^2 + \Sigma mv'^2 \\
= M\left[\frac{VX(M-a)+d}{M+a}\right]^2 + M\left[\frac{VY(M-b)+e}{M+b}\right]^2 \\
+ M\left[\frac{VZ(M-c)+f}{M+c}\right]^2 \\
+ \left(\frac{2MVX+d}{M+a}\right)^2 a + \left(\frac{2MVY+e}{M+b}\right)^2 b + \left(\frac{2MVZ+f}{M+c}\right)^2 c + \Sigma mv^2 \\
- \left(\frac{2MVX+d}{M+a}\right) d - \left(\frac{2MVY+e}{M+b}\right) e - \left(\frac{2MVZ+f}{M+c}\right) f,
\end{aligned}
$$

....

$$MV'^2 + \Sigma mv'^2 = MV^2X^2 + MV^2Y^2 + MV^2Z^2 + \Sigma mv^2 = MV^2 + \Sigma mv^2.$$

Donc, en ce cas encore, la force vive du système est conservée.

Ainsi, dans le choc oblique comme dans le choc normal, dans le choc simultané comme dans le choc simple de deux atomes, le principe de la conservation des forces vives se vérifie toujours. Donc ce principe est général et il découle de la loi d'inertie et des lois du choc qui sont réglées elles-mêmes par le principe de la réaction égale à l'action. Nous n'avons pas besoin de rappeler que nous n'admettons aucune force en dehors des quantités de mouvement que possèdent les mobiles et des tensions élastiques que détermine le choc.

54. *Cas où plusieurs chocs simultanés successifs peuvent être remplacés par un seul.* — Ce cas arrive lorsque les atomes $m_1, m_2, \ldots, m_n, m'_1, m'_2, \ldots, m'_n, \ldots$ qui viennent frapper, par groupes successifs, la sphère M, ne forment à eux tous qu'une masse très faible par rapport à celle de M.

Reprenons les formules de l'article précédent

$$V'X' = \frac{VX(M-a)+d}{M+a},$$

$$V'Y' = \frac{VY(M-b)+e}{M+b},$$

$$V'Z' = \frac{VZ(M+c)+f}{M+c},$$

et supposons que M reçoive un second choc. En désignant par a', b', c', d', e', f' des quantités analogues à a, b, c, d, e, f, nous trouverons

$$\mathrm{V''X''} = \frac{\mathrm{V'X'}(\mathrm{M} - a') + d'}{\mathrm{M} + a'}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{M} + a'} \left\{ \left[\frac{\mathrm{VX}(\mathrm{M} - a) + d}{\mathrm{M} + a} \right] (\mathrm{M} - a') + d' \right\}$$

$$= \frac{\mathrm{VX}[\mathrm{M}^2 - (a + a')\mathrm{M} + aa'] + (d + d')\mathrm{M} - da' + ad'}{\mathrm{M}^2 + (a + a')\mathrm{M} + aa'},$$

et si l'on admet que les masses m_1, m_2, ..., m_n soient assez petites pour qu'on puisse négliger, en comparaison des autres termes, les produits aa', da' et ad', on aura finalement

$$\mathrm{V''X''} = \frac{\mathrm{VX}[\mathrm{M} - (a + a')] + (d + d')}{\mathrm{M} + (a + a')},$$

résultat identique à celui qu'on eût obtenu si les deux chocs successifs avaient été simultanés.

Les composantes $\mathrm{V''Y''}$, $\mathrm{V''Z''}$ conduiraient évidemment à la même conclusion. De plus, il est manifeste qu'en passant de deux chocs à trois, de trois à quatre, etc., cette conclusion peut s'étendre à un nombre quelconque de chocs successifs, pourvu toutefois que la somme des masses qui choquent M demeure toujours assez faible pour permettre de négliger les produits des facteurs a, b, c, ..., a', b', ..., a'', b'', ...

Nous avons signalé ce cas particulier du choc simultané, parce que nous userons fréquemment des simplifications qu'il comporte.

La démonstration précédente suppose que les axes principaux d'inertie des masses m sont les mêmes dans les deux chocs successifs; mais cette restriction n'est pas nécessaire, comme on peut le vérifier, en recommençant les calculs avec un système d'axes rectangulaires quelconques.

ARTICLE IV.

La force. — Forces atomiques.

55. Dans le langage ordinaire, le mot *force* a une signification très large; mais, au point de vue mécanique, on peut définir la force, une cause capable de produire, de transmettre ou de modifier le mouvement. C'est une forme de l'activité, et, par suite, elle réside dans un agent. Cet agent, quel est-il?

Sans doute il faut remonter à Dieu pour trouver la cause première de tout mouvement et le principe de toute force; mais nous avons rejeté (n° 5) le système qui n'admet pas de causes secondes de mouvement. Nous rejetons également l'opinion de ceux qui prétendent attribuer à des êtres supérieurs, anges ou démons, la direction des mouvements généraux de l'Univers, et, tout en convenant que les esprits purs peuvent jouir de la puissance motrice et l'exercer dans certaines limites sous les ordres ou avec la permission de Dieu, nous chercherons les causes secondes des mouvements matériels dans la matière même.

Or, d'après la doctrine exposée au Chapitre I, en dehors des êtres vivants, tout se réduit, dans le monde des corps, à des atomes et à des molécules. Donc, si nous négligeons les mouvements émanés des forces vitales, tous les autres doivent s'expliquer par l'influence réciproque des éléments matériels.

Pour plus de précision dans les termes, commençons par distinguer la force *en puissance* et la force *en acte*. Cette distinction est d'un usage continuel, et l'on dit d'un homme qu'il possède une grande force, non seulement quand il la déploie, mais alors même qu'il se repose.

Dans les Traités de Mécanique, au contraire, il semble que la force est inséparable de son exercice et, de plus, qu'elle intervient toujours avec la plénitude de son pouvoir, puisqu'on la mesure par l'effet qu'elle produit ou, du moins, qu'elle tend à produire. C'est qu'au lieu de considérer les agents et les forces réelles, on n'envisage que des forces fic-

tives, capables de rendre raison de tel ou tel phénomène, et naturellement on proportionne la cause à l'effet qu'il s'agit d'expliquer.

Mais comme nous voulons, non pas seulement imaginer des causes possibles des phénomènes, mais atteindre les causes réelles, nous éliminerons provisoirement toutes les forces fictives, sauf à les rétablir plus tard dans les cas où nous aurons reconnu la légitimité de leur intervention. Ajoutons que certaines forces fictives, introduites dès le début des études mécaniques sous le nom de *forces constantes*, offrent à l'esprit de sérieuses difficultés, et, tout en suivant l'enchaînement logique des propositions, on se demande s'il existe de telles forces dans la nature, des forces toujours en acte et toujours avec la même énergie.

Pour les partisans des actions à distance, la coexistence de deux molécules matérielles suffit, il est vrai, pour qu'elles agissent nécessairement et d'une manière continue l'une sur l'autre; mais, comme par le fait même des attractions ou répulsions réciproques la distance varie et la force avec la distance, il suit que la constance fait défaut.

Pour ceux qui rejettent les actions à distance, la continuité peut faire aussi bien défaut que la constance, j'entends la continuité dans l'exercice de la force. Ainsi la force de résistance, suite nécessaire de l'impénétrabilité qui existe d'une manière permanente dans les atomes, ne passe à l'acte qu'au moment des rencontres qui sont discontinues, et même pendant la durée du choc, si l'action ou la réaction de la force est continue, son intensité n'est pas constante.

Comme exemple de force continue constante, on cite d'ordinaire la pesanteur, et l'on fait appel à la conscience que nous avons de l'effort nécessaire pour tenir un poids soulevé. Au premier abord, cet exemple paraît convaincant; mais, à la réflexion, il ne semble pas propre à trancher la controverse. S'il s'agit de la constance de l'effort développé pour soutenir un même poids, nous observerons que cet effort varie avec l'âge, la santé et la constitution des personnes, et que, pour une même personne, il croît avec la durée de l'expérience; car la tension ou la contraction prolongée des fibres musculaires augmente la fatigue. S'il s'agit de la continuité, nous

éprouvons, il est vrai, que la sensation est permanente, mais on ne peut légitimement couclure de la permanence de la sensation à la permanence de la cause extérieure qui la produit. L'expérience prouve, en effet, que la durée des sensations se prolonge au delà de l'impression des objets sensibles et qu'une lumière intermittente nous paraît continue si la période d'intermittence est assez courte. Rien n'empêche d'affirmer que le tact se comporte comme la vue et que la pression d'un poids sur notre main nous paraît continue, parce qu'elle résulte de chocs multipliés et très rapides.

Les données des sens sont donc impuissantes à démontrer l'existence de forces continues constantes. Il ne s'ensuit pas qu'il faille bannir des études mécaniques la considération de telles forces; souvent, par raison de simplicité dans les explications, il est avantageux de substituer à une multitude très complexe de forces réelles une résultante moyenne dont l'action est sensiblement constante. Reste seulement à décider dans quels cas cette substitution est légitime.

56. Après ces considérations générales, abordons la détermination précise et la mesure des *forces atomiques*.

Si nous envisageons d'abord un atome isolé au repos, l'activité de sa monade s'exerce sur un volume d'espace réel qu'elle rend impénétrable, mais elle ne se manifeste pas comme force. Par suite de son inertie, l'atome ne peut se mouvoir de lui-même; il ne peut davantage communiquer un mouvement qu'il ne possède pas, il est seulement apte à modifier le mouvement d'un autre atome qui tendrait à envahir la place qu'il occupe. Dans ce cas, en effet, il réagit contre l'envahisseur et fait acte de force. Heurté par le nouveau venu, il subit une déformation, se contracte dans la direction de la ligne des centres et déploie une activité que nous pouvons comparer à celle d'un ressort comprimé qui fait effort pour se détendre. C'est à cette activité spéciale de l'atome, manifestée seulement pendant la durée du choc, que nous donnons le nom de *force de tension, force de ressort* ou de *force élastique*. Nous la désignerons par la lettre φ.

Elle s'évanouit à la fin du choc, mais alors l'atome se meut. Son centre s'est déplacé avec une vitesse croissante pendant

toute la période de contact; puis, en vertu de son inertie, il conserve rectiligne et uniforme le mouvement qu'il a reçu d'une impulsion étrangère, et il est prêt à le transmettre dans les rencontres. Il est donc revêtu d'une puissance nouvelle qu'il ne possédait pas au repos et que nous appelons *force due au mouvement* ou *force cinétique*. Nous la désignerons par la lettre f.

Cette force apparaît et disparaît, croît et décroît avec la quantité de mouvement, et, par suite, peut à bon droit être mesurée par cette quantité. Si donc m est la masse et v la vitesse d'un atome à un instant donné, sa force cinétique à cet instant est $f = mv$. De même que la vitesse, cette force est constante en dehors des chocs et variable pendant leur durée.

Son travail est facile à mesurer. En effet, le travail d'une force est le produit de cette force f par la longueur l du chemin que parcourt son point d'application, lorsque les deux directions de la force et du chemin sont identiques. Or cette condition est toujours remplie dans le cas actuel où l'on peut prendre pour point d'application le centre même de l'atome qui se meut. Par suite, le travail élémentaire de la force cinétique est $mv \times v\,dt$, et le travail dans l'intervalle de temps $t - t_0$ est $\int_{t_0}^{t} mv^2 dt$. En dehors des chocs, v est constant, et le travail $f.l = mv.vt = mv^2 t$.

Le travail ainsi envisagé ne diffère pas de l'action (n° 39), et le rapport du travail au temps ou la vitesse du travail se confond avec la force vive mv^2 (n° 40).

57. Cherchons aussi à préciser la mesure de la force élastique et de son travail, et, pour cela, considérons d'abord le cas le plus simple, celui du choc direct de deux atomes dont l'un m' est en repos et l'autre m est animé de la vitesse v ou mû par la force cinétique $f = mv$. Deux effets distincts se produisent pendant le choc : une déformation des deux atomes et une transmission de mouvement de m à m'.

La déformation donne naissance à deux forces élastiques, égales et contraires, φ et φ', et la transmission de mouvement à une force cinétique $f' = m'v'$ qui croît à mesure que $f = mv$

décroît, en sorte qu'on a constamment

$$f + f' = mv_0,$$

en appelant v_0 la valeur de v au début du choc.

La force élastique de m' résiste à la force cinétique de m jusqu'au milieu du choc, et l'on a à chaque instant

$$\varphi' dt = m\, dv;$$

d'un autre côté, la force élastique de m engendre la force cinétique de m', et l'on a

$$\varphi\, dt = m'\, dv'.$$

Au milieu du choc, les vitesses v et v' sont égales; la période de compression finit; la détente commence, et chacune des forces élastiques, réagissant contre la déformation, travaille à éloigner du point de contact le centre de son atome, en sorte que la force φ diminue la vitesse v et la forme φ' augmente la vitesse v' jusqu'au moment où la forme sphérique est parfaitement rétablie et où la séparation s'opère.

D'après notre étude du choc (n° 47), nous connaissons la valeur des quantités de mouvement ou des forces cinétiques au milieu et à la fin du choc; mais, pour déterminer la valeur de ces forces à tout instant du choc, il faudrait connaître la loi de variation des vitesses pendant ce phénomène, et nous l'ignorons. Par suite, il nous est également impossible d'exprimer la force élastique en fonction du temps, et nous ne pouvons estimer que sa valeur moyenne.

Soient φ_1 cette valeur moyenne et τ la durée du choc; la relation $\varphi\, dt = m'\, dv'$ donne

$$\int_0^{\frac{\tau}{2}} \varphi\, dt = \int_0^{\frac{\tau}{2}} m'\, dv'$$

ou

$$\varphi_1 \frac{\tau}{2} = m'(v')_0^{\frac{\tau}{2}} = m' \frac{mv_0}{m + m'};$$

d'où

$$\varphi_1 = \frac{2mm'v_0}{(m + m')\tau}.$$

On voit que, pour $\tau = 0$, φ_1 serait infini, ce qui montre l'im-

possibilité du choc instantané ; mais, si le choc n'est pas instantané, sa durée est tellement courte que jusqu'ici elle n'a pu être appréciée, et, par suite, la grandeur des forces élastiques est très considérable relativement à celle des forces cinétiques correspondantes.

Le travail accompli par les forces élastiques pour résister à la déformation et rétablir la forme primitive des atomes est tout différent de celui que nous avons défini ci-dessus (n° **56**), et, pour attribuer à ce travail une mesure en rapport avec sa nature, il faudrait l'exprimer, par exemple, en fonction de l'aplatissement que subit la sphère atomique, et nous ignorons comment varie cet aplatissement avec les masses et les vitesses qui entrent en jeu dans le choc. Nous sommes également dans l'impuissance pour mesurer convenablement l'énergie de ce travail, que nous appellerons *énergie élastique* et que nous désignerons par la lettre ε, en caractérisant l'énergie ordinaire $\frac{1}{2}mv^2$ par l'épithète cinétique et lui réservant la lettre e comme symbole. Ces deux sortes d'énergie s'accompagnent et se transforment l'une dans l'autre durant le phénomène du choc.

Ainsi, dans le cas simple que nous venons d'étudier, l'énergie cinétique $e + e'$ du système des deux atomes m et m' est la même avant et après la rencontre ; mais, dans l'intervalle, la somme $\frac{1}{2}(mv^2 + m'v'^2)$ va en diminuant depuis le début jusqu'au milieu du choc, où elle devient $\frac{m}{2(m+m')}mv_0^2$. Pendant qu'elle décroît, l'énergie élastique du système 2ε augmente jusqu'à atteindre son maximum, de sorte qu'elle se développe aux dépens de l'énergie cinétique dans la première phase du choc, et, dans la seconde, elle se dépense à son tour en restituant à l'énergie cinétique sa valeur première. Il est donc naturel de considérer le gain de l'une comme équivalent à la perte de l'autre et d'admettre qu'on a constamment

$$e + e' + 2\varepsilon = \tfrac{1}{2} mv_0^2.$$

Par suite, au milieu du choc,

$$2\varepsilon = \tfrac{1}{2}mv_0^2 - (e + e') = \frac{1}{2}\,\frac{m'}{m+m'}\,mv_0^2,$$

et cette valeur maximum peut être prise comme mesure de la violence du choc.

Dans le cas où les deux atomes m et m' ont des vitesses initiales v_0, v'_0, on peut, en s'appuyant sur la loi d'indépendance des mouvements, leur communiquer une vitesse commune $-v'_0$, sans modifier les résultats du choc. Or l'atome m' se trouve ainsi ramené au repos, et l'on a immédiatement, pour la force élastique moyenne,

$$\varphi_1 = \frac{2mm'(v_0 - v'_0)}{(m+m')\tau}$$

et, pour l'énergie élastique maximum,

$$\frac{1}{2}\,\frac{mm'(v_0 - v'_0)^2}{m+m'}.$$

D'ailleurs

$$e + e' + 2\varepsilon = \tfrac{1}{2}(mv_0^2 + m'v_0'^2).$$

Du moment que cette formule est admise pour le choc direct de deux atomes, on vérifie sans peine qu'elle convient au choc oblique de deux atomes, au choc simultané et à un système quelconque de tant d'atomes qu'on voudra. Donc l'équation

$$\Sigma e + \Sigma\varepsilon = \text{const.}$$

subsiste en toute hypothèse. Tout ce qui disparaît d'énergie cinétique se transforme en énergie élastique et réciproquement. Tel est le grand principe de la conservation de l'énergie dans l'univers [1].

58. *Forces fictives continues constantes.* — Avant de terminer cet article, essayons d'expliquer l'origine et la nature des forces constantes admises en Mécanique.

---

(1) M. Rankine a proposé les dénominations d'*énergie actuelle* et d'*énergie potentielle* pour représenter les deux parties qui composent l'énergie totale. Nous les aurions volontiers adoptées; mais notre désir de ne pas innover a dû céder devant les exigences de la précision. L'expression *énergie potentielle* nous paraît trop vague, et les explications qu'on en donne supposent ordinairement des attractions ou répulsions à distance qui ne cadrent pas avec notre système. D'autre part l'épithète *actuelle,* d'après nos définitions convient aussi bien à l'énergie élastique qu'à l'énergie cinétique.

Concevons une masse M soumise à une série de chocs qui se succèdent rapidement à intervalles égaux et qui sont tous produits par des masses égales m, animées de la même vitesse v, et désignons par $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n$ la vitesse initiale et les vitesses successives que prend M après le premier, le deuxième, ..., le $n^{\text{ième}}$ choc. En supposant les masses parfaitement élastiques et le choc direct, nous aurons

$$v_1 = \frac{2mv - (m - \mathrm{M})v_0}{m + \mathrm{M}}$$

et, par suite,

$$v_1 - v_0 = \frac{2mv}{m + \mathrm{M}}\left(1 - \frac{v_0}{v}\right).$$

De même

$$v_2 - v_1 = \frac{2mv}{m + \mathrm{M}}\left(1 - \frac{v_1}{v}\right),$$

.........................,

$$v_n - v_{n-1} = \frac{2mv}{m + \mathrm{M}}\left(1 - \frac{v_{n-1}}{v}\right).$$

Si donc v est assez grand pour que les rapports $\frac{v_0}{v}, \ldots, \frac{v_{n-1}}{v}$ soient négligeables vis-à-vis de l'unité, l'accroissement de vitesse de M sera sensiblement proportionnel au temps. Or on est convenu, en Mécanique, d'appeler *force constante* la cause inconnue qui, agissant sur un mobile, lui communique des accroissements de vitesse égaux dans des temps égaux. L'exemple cité réalise donc sensiblement les conditions où l'on fait intervenir une force constante. Cependant il est clair que la cause réelle du phénomène diffère notablement de la cause fictive introduite pour l'expliquer. Ainsi : 1° la force impulsive qui détermine l'accroissement de vitesse ne réside pas dans un agent unique, mais dans une série d'agents distincts possédant la même force cinétique; 2° l'impulsion n'est pas continue, mais intermittente; 3° elle n'est pas constante, mais varie pendant toute la durée des chocs. Voici comment on peut faire disparaître ces divergences entre la réalité et la fiction et concevoir qu'une force continue constante puisse être équivalemment substituée aux forces réelles.

D'abord nous pouvons ramener à l'unité la multiplicité des agents moteurs et, sans changer les résultats, admettre que la même masse m revient sans cesse à la charge et produit seule tous les chocs successifs. En second lieu, si τ est la durée des chocs et $(n-1)\tau$ l'intervalle qui les sépare, nous pouvons remplacer chacun des chocs intermittents par n chocs se succédant sans interruption, pourvu que la vitesse v soit aussi remplacée par une autre u, n fois plus petite. De cette sorte l'accroissement de vitesse dans le temps $n\tau$ n'aura pas changé et l'impulsion sera continue. Enfin, à la place de la force impulsive variable pendant le choc, nous pouvons mettre une force constante égale à la force élastique moyenne qui lui correspond (57), $\varphi = \frac{2mMu}{(m+M)\tau}$, et nous aurons ainsi substitué aux agents réels une force fictive, continue, constante, capable de produire les mêmes effets. Ajoutons cependant que la substitution n'est légitime et ne conduit à des résultats exacts que pour une période de temps finie au moins égale à $n\tau$; car, dans la réalité, l'accroissement de vitesse n'est pas égal dans des temps égaux, si petits qu'ils soient, mais seulement dans des temps égaux à $n\tau$. Pour des intervalles moindres, il est irrégulier, et le mouvement réel est alternativement varié et uniforme.

La mesure de la force fictive considérée est bien celle qu'on assigne d'ordinaire aux forces constantes, c'est-à-dire le produit de la masse M par l'accélération γ. En effet, puisque l'accroissement de vitesse dans le temps τ est

$$\frac{2mu}{m+M},$$

l'accroissement dans l'unité de temps est

$$\gamma = \frac{2mu}{(m+M)\tau}, \quad \text{et par suite} \quad \varphi = M\gamma.$$

ARTICLE V.

Réduction des lois fondamentales de la nature.

59. Les quatre lois, énumérées à l'article II de ce Chapitre, sont généralement considérées comme irréductibles. Cependant la quatrième, loi d'indépendance des mouvements ou loi de mouvement relatif, peut se déduire des formules du choc au même titre que la loi de conservation de l'énergie.

Nous avons déjà observé (n° 44) que cette proposition : *Le mouvement commun à plusieurs corps n'influe pas sur leurs mouvements particuliers,* est une conséquence immédiate des principes de la Cinématique, si elle se borne à affirmer que les positions relatives des mobiles entièrement libres ne sont pas modifiées lorsqu'on ajoute à leurs vitesses une composante égale et parallèle pour tous.

Mais, comme on l'interprète en ce sens que les rapports d'action ne sont pas plus modifiés que les rapports de position, il y a là un point obscur qui n'est pas du domaine de la Cinématique, et c'est ce point que l'on prétend ne pouvoir être démontré par le raisonnement ni déduit des lois précédentes. Or cette déduction est possible et même facile dans notre système, où tous les rapports d'action se réduisent à des chocs entre éléments parfaitement élastiques [1]. Il nous suffit de vérifier que les formules du choc ne sont pas altérées lorsqu'on imprime un mouvement commun aux mobiles qui se heurtent. Prenons, par exemple, les formules

$$V = \frac{2m'v' - (m' - m)v}{m + m'}, \quad V' = \frac{2mv - (m - m')v'}{m + m'},$$

---

[1] Nous ne contestons aucunement la distinction usuelle de corps mous et de corps élastiques. Mais, lorsque deux mobiles se heurtent, ce sont les molécules superficielles qui entrent en collision, et il suffit que ces molécules soient élastiques pour que notre assertion subsiste. Nous rechercherons plus tard, en traitant de la cohésion, la cause qui différentie non les éléments, mais les portions sensibles de matière, au point de vue de l'élasticité.

qui donnent les vitesses, après un choc direct, de deux masses m, m' animées auparavant des vitesses v et v'; et supposons qu'avant la collision on leur ait imprimé une vitesse commune w, positive ou négative à volonté. Si $\mathbf{W}$ et $\mathbf{W}'$ désignent maintenant les vitesses après le choc, nous aurons

$$\mathbf{W} = \frac{2m'(v'+w) - (m'-m)(v+w)}{m+m'} = \mathbf{V} + w,$$

et de même

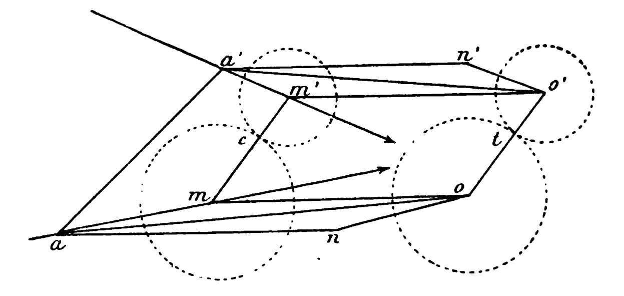
$$\mathbf{W}' = \mathbf{V}' + w.$$

Donc les rapports d'action dans le choc, qui se traduisent par les variations de vitesses, ne sont aucunement modifiés lorsqu'on ajoute ou retranche un mouvement commun aux mobiles.

Cette vérification, exécutée pour le choc direct, réussirait également pour les formules du choc oblique ou du choc simultané. Prouvons-le pour le choc oblique de deux atomes.

Supposons d'abord ces atomes animés chacun d'une vitesse propre, que nous représenterons en grandeur et en direction par les lignes am, $a'm'$; et soit mm' (*fig.* 12) la ligne des centres à l'instant du choc, nous savons ce qui se passera (**51**).

Fig. 12.



Imaginons maintenant qu'au moment où ces atomes se trouvaient en a et a', ils aient reçu une impulsion capable de leur communiquer deux vitesses égales et parallèles an, $a'n'$, et construisons les parallélogrammes des vitesses. Les deux mobiles parcourront les diagonales ao, $a'o'$ dans le même temps qu'ils auraient mis à parcourir am, $a'm'$, sans l'inter-

vention de l'impulsion étrangère. Donc l'instant du choc n'a pas été changé par suite du mouvement commun qui leur a été imprimé. Il est évident aussi, d'après la figure, que la ligne oo' est égale et parallèle à mm'. Donc la direction de la ligne des centres au moment du choc n'a pas varié davantage.

Si l'on projette les nouvelles vitesses ao et $a'o'$ sur la normale oo' et sur le plan tangent au point de contact, on obtiendra le même résultat que si l'on projetait $am + an$ et $a'm' + a'n'$. Donc les composantes normales des vitesses, au début du choc, en o et o' sont égales à celles qu'on aurait eues en m et m', augmentées d'une même quantité w produite par la projection de an et $a'n'$. Donc, en vertu du calcul ci-dessus, les vitesses normales après le choc seront aussi égales à celles qu'on eût obtenues en m et m', augmentées de w. Comme d'ailleurs les vitesses tangentielles n'auront pas été modifiées, il est clair que tout s'est passé dans le choc, comme si le mouvement commun n'avait pas existé.

En généralisant cette explication, on voit que le mouvement commun imprimé à tous les atomes d'un système quelconque ne modifie en rien leurs influences réciproques. Donc la loi du mouvement relatif ou de l'indépendance des mouvements est implicitement renfermée dans les lois de l'inertie et de l'égalité entre l'action et la réaction qui interviennent seules pour l'établissement des formules du choc.

Observons en outre que les deux dernières lois ont pour effet la conservation de l'énergie; car, en vertu de l'inertie, un mobile libre de toute influence étrangère possède une vitesse uniforme et par suite une énergie constante; et, dans les rencontres, l'égalité entre l'action et la réaction détermine une transformation d'énergie cinétique en énergie élastique équivalente et réciproquement, de sorte que la somme totale d'énergie demeure toujours constante.

Nous pouvons donc ramener les lois fondamentales de la nature aux deux suivantes :

1° Loi de conservation des atomes qui comprend non seulement la conservation de leur masse ou étendue, mais de toutes leurs propriétés, mobilité, inertie, élasticité.

2° Loi de conservation de l'énergie, qui suppose un pre-

mier mouvement communiqué par une cause distincte de la matière et maintenu intégralement, comme énergie, en vertu des propriétés mêmes des atomes.

La première de ces lois conserve l'action créatrice de Dieu et la seconde son action motrice, en sorte que leur but commun est de conserver l'action divine dans le monde.

En face de cette simplicité de moyens et de la magnificence des résultats, je ne puis retenir ce cri d'admiration : Gloire à Dieu, source première et permanente de l'être et du mouvement!

Si je m'occupais des créatures vivantes, j'ajouterais avec saint Paul : « et source de la vie. *In ipso enim vivimus, movemur et sumus.* » (*Actes des Apôtres,* XVII, 28.)

CHAPITRE III.

L'ÉON OU FLUIDE PRIMORDIAL.

ARTICLE I.

Nature de l'éon.

60. L'*éon* ou *fluide primordial* se compose des atomes les plus élémentaires, dont le volume représente le minimum de grandeur matérielle réalisée dans la création. Nous l'appelons *fluide,* parce que ses éléments sont aptes à céder avec la plus grande facilité à l'action de toute force; mais il diffère de tous les autres fluides en ce que ces mêmes éléments n'ont aucun lien d'union entre eux. Leur parenté résulte de l'égalité de forme et de volume, mais leurs mouvements sont complètement indépendants les uns des autres. Nous l'appelons *fluide primordial,* parce que nous le considérons comme l'origine de tous les phénomènes physiques, comme le moteur universel ou du moins l'agent de transmission de tous les mouvements.

Envisageons-le d'abord à l'état statique et, dans ce but, transportons-nous à l'origine des temps pour voir se dérouler sous nos yeux le spectacle sublime de la création. Après avoir produit et délimité la sphère immense du monde, Dieu la peuple de myriades d'atomes éoniens, uniformément répandus dans sa vaste étendue. Leur nombre est si prodigieux que chaque millionième de millimètre cube en contient des billions et leur petitesse si excessive, que cette multitude innombrable n'occupe qu'une très minime portion de l'espace.

Il en résulte que la densité de l'éon est extrêmement faible.

Soient

δ cette densité;
μ la masse d'un atome;
N le nombre d'atomes contenus dans l'unité de volume,

$$\delta = N\mu;$$

et, si l'on désigne par ρ le rayon des atomes et par λ l'intervalle moyen qui les sépare,

$$\mu = \tfrac{4}{3}\pi\rho^3, \quad N = \frac{1}{\lambda^3}$$

et, par conséquent,

$$\delta = \tfrac{4}{3}\pi\frac{\rho^3}{\lambda^3}.$$

Comme δ est supposé très faible, il faut que le rapport $\frac{\rho}{\lambda}$ soit lui-même très petit.

ARTICLE II.

Mouvements de l'éon.

61. Nous avons envisagé l'éon à l'état de repos, et ses atomes, en raison de leur inertie, sont incapables de sortir par eux-mêmes de l'immobilité. A l'origine du mouvement comme à l'origine de l'être, il faut une intervention spéciale de Dieu. Lui seul est premier moteur comme seul il est créateur. Voyons-le donc, par un acte de sa volonté toute-puissante, lancer dans la carrière les atomes éoniens, d'un mouvement égal et dans toutes les directions. Cette impulsion divine, seule force instantanée, parce que seule elle est infinie, leur communique au premier moment une vitesse énorme que nous pouvons évaluer, si les faits l'exigent, à plusieurs millions de fois la vitesse de la lumière. Une rapidité si merveilleuse compense l'exiguïté du volume et relève la grandeur du produit de la masse par la vitesse ou de la quantité de mouvement. Cette quantité représente la force cinétique, déposée par Dieu à l'origine dans chaque atome de l'éon, et en vertu de laquelle il peut, à son tour, être cause de mouvement.

Si nous appelons v la vitesse originelle commune à tous les atomes éoniens, chacun d'eux possèdera une quantité de mouvement μv et une énergie $\frac{1}{2}\mu v^2$; et, d'après les lois générales de la Dynamique, la somme des quantités de mouvement estimées suivant une direction quelconque et la somme des énergies, cinétiques ou élastiques, de tous ces atomes demeureront constantes, quels que soient les chocs qui pourront survenir entre eux.

Cependant une difficulté se présente si l'on se transporte aux limites de l'espace réel. Que devient la vitesse d'un atome qui atteint ces limites? Dans notre système, il ne peut passer outre; car il est constitué par une monade localisée, et il n'y a pas de localisation possible en dehors de l'espace réel. Donc, en atteignant les bornes de l'univers créé, l'atome doit se réfléchir, comme il ferait à la rencontre d'un obstacle infranchissable et, durant la période de déformation, se développent en son sein une force et une énergie élastique qui compensent la perte de force et d'énergie cinétique.

Dans l'hypothèse d'un espace sans fin ouvert devant eux, les atomes dont le nombre est nécessairement limité se dissémineraient indéfiniment en tous sens et la somme des énergies, constante dans l'ensemble de l'univers, irait sans cesse en diminuant pour chaque région particulière. Or les données de l'expérience ne constatent aucune diminution de ce genre. Donc les faits eux-mêmes parlent en faveur de cette réflexion que nous admettons aux confins de l'espace.

Il est vrai que l'expérience s'applique aux mouvements des corps célestes et de leurs puissantes masses, plutôt qu'à ceux du fluide primordial. Mais, dans notre système, l'énergie de tous les astres, comme de toutes les molécules, n'est qu'un emprunt fait à l'énergie de l'éon et la somme des énergies de toute la matière créée égale constamment celle que les atomes éoniens reçurent à l'origine de la main de Dieu même.

Pour maintenir le principe de la conservation de l'énergie dans les différentes régions de l'univers, par exemple dans le système solaire, sans admettre une réflexion aux limites du monde, il faut recourir à l'une de ces deux hypothèses : ou l'espace réel est infini, ainsi que le nombre des atomes qui le sillonnent en tous sens, ou bien il existe des actions à dis-

tance et tout un cortège de forces attractives chargées de ramener vers le centre du monde les éléments vagabonds qui voudraient fuir à l'opposé. Or nous avons prouvé que le nombre infini (n° 7) et l'action à distance (n° 5) étaient également impossibles. Donc les hypothèses susdites doivent être rejetées.

Du reste, présentement, nous considérons l'éon comme s'il existait seul, et nous n'avons pas à nous préoccuper de l'influence que les astres peuvent exercer sur lui. Dans cet état d'abstraction, il est clair que l'énergie moyenne de ses atomes demeure constante; mais leur vitesse moyenne, prise en valeur absolue, diminue par l'action des chocs. Soient, en effet, w et w' les vitesses après le choc de deux atomes qui se mouvaient auparavant avec la même vitesse v. On a bien

$$w^2 + w'^2 = 2v^2;$$

mais on ne saurait avoir en même temps

$$w + w' = 2v,$$

excepté dans le cas particulier où $w = w' = v$, et l'on aura en général

$$w + w' < 2v \quad \text{ou} \quad \frac{w + w'}{2} < v,$$

c'est-à-dire que la vitesse moyenne aura diminué.

Cette diminution toutefois ne tardera pas à s'arrêter, car les vitesses des atomes primitivement égales deviendront inégales après une première série de collisions mutuelles, et le choc de deux atomes animés de vitesses inégales peut produire aussi bien un relèvement qu'un abaissement de la vitesse moyenne. Celle-ci arrivera donc rapidement, par suite des rencontres multipliées, à osciller autour d'une limite stable dont elle ne s'écartera pas sensiblement. Clerk Maxwell a trouvé ([1]) que cette limite u était égale à

$$v\sqrt{\frac{2^3}{3\pi}} = v \times 0,921.$$

([1]) *Philosophical Magazine.* (Divers Mémoires depuis 1860.)

La vitesse originelle v, toujours numériquement égale à la racine du carré moyen des vitesses, est parfois appelée pour cette raison *moyenne quadratique des vitesses.*

ARTICLE III.

Longueur moyenne du chemin libre des atomes.

62. Nous entendons par *chemin libre* la droite parcourue par le centre d'un atome entre deux chocs successifs, et, pour calculer sa longueur moyenne, nous attribuons à tous les atomes la vitesse $u = v\sqrt{\frac{2^3}{3\pi}}$.

Cette question de la longueur moyenne du chemin libre a été traitée par Clausius ([1]). Il établit d'abord ce théorème :

Les longueurs moyennes des chemins libres d'une molécule, pour les deux cas où les autres molécules se meuvent avec la même vitesse que la molécule considérée ou bien se trouvent en repos, sont entre elles dans le rapport de $\frac{3}{4}$ *à* 1 ([2]).

Il détermine ensuite la longueur cherchée dans l'hypothèse où une seule molécule se meut au milieu des autres en repos.

Nous allons reprendre cette détermination par une méthode qui nous paraît avoir sur celle de Clausius l'avantage d'une plus grande simplicité.

Soient ρ le rayon et λ la distance moyenne des atomes, répandus uniformément dans l'espace. Le milieu homogène est supposé en repos, à l'exception de n atomes qui se meuvent parallèlement à la direction de la flèche f (*fig.* 13) et qui se trouvent, au même instant, régulièrement distribués sur l'unité de surface du plan aa' perpendiculaire à la direction f. Concevons le milieu, au-dessous de aa', décomposé en tranches parallèles d'épaisseur λ par les plans bb', cc', dd', ... La portion de chaque tranche correspondant à l'unité de surface

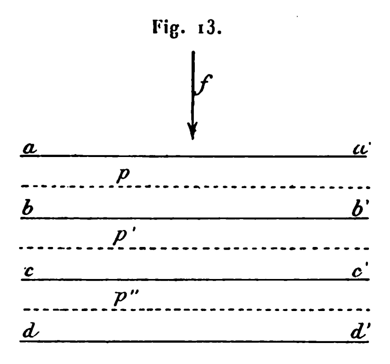
---

([1]) *Théorie mécanique de la chaleur,* Partie II, Mémoire XV (traduct. Folie).

([2]) *Id.,* p. 223.

contient un nombre d'atomes égal à $\frac{1}{\lambda^2}$, et, si nous projetons ces atomes sur les plans médians $p, p', p'', \ldots$, leurs projections recouvriront dans chacun des plans une étendue superficielle égale à $\pi\rho^2 \frac{1}{\lambda^2}$, et l'espace libre par unité de surface sera $1 - \frac{\pi\rho^2}{\lambda^2}$. Nous ne tenons pas compte de l'empiètement possible de quelques projections les unes sur les autres; il ne pourrait en résulter qu'une erreur insensible. En supposant

Fig. 13.



que toutes les rencontres ont lieu sur les plans $p, p', p'', \ldots$, nous n'altérons pas non plus la longueur moyenne du chemin libre.

Or, pour qu'un des atomes en mouvement rencontre un des atomes en repos, il faut que la distance de leur centre, projetée sur les plans médians, soit plus petite que 2ρ. Nous pouvons donc réduire les n atomes mobiles à leur centre en doublant les rayons des atomes au repos, et alors l'étendue du passage libre devient $1 - \frac{4\pi\rho^2}{\lambda^2}$ ou $1 - \alpha$, en posant

$$\alpha = \frac{4\pi\rho^2}{\lambda^2}.$$

D'après les chances probables, en traversant la première tranche $aa'bb'$, les n atomes mobiles se partageront en deux groupes, $n\alpha$, qui seront choqués, et $n(1 - \alpha)$, qui passeront librement. De même, à la seconde tranche, ces $(n - 1)\alpha$ atomes

se diviseront en $n(1-\alpha)\alpha$, qui éprouveront des collisions et $n(1-\alpha)^2$, qui n'en éprouveront pas, etc. En définitive, sur les n atomes,

$n\alpha$	seront choqués à la distance		$\frac{\lambda}{2}$	du plan aa',
$n(1-\alpha)\alpha$	»	»	$\frac{3\lambda}{2}$	»
$n(1-\alpha)\alpha^2$	»	»	$\frac{5\lambda}{2}$	»

. . . .

Si nous multiplions le nombre d'atomes choqués par la distance moyenne du lieu de la rencontre, si ensuite nous divisons par n la somme de ces produits, le quotient représentera la longueur moyenne l' du chemin libre, et nous trouverons la formule

$$l' = \frac{\alpha\lambda}{2}\left[1+3(1-\alpha)+5(1-\alpha)^2+7(1-\alpha)^3+\ldots\right]$$

ou

$$l' = \frac{\lambda(2-\alpha)}{2\alpha}.$$

Comme le rapport $\frac{\rho}{\lambda}$ est très petit, α ou $\frac{4\pi\rho^2}{\lambda^2}$ est négligeable en face de deux unités, et cette simplification nous conduit à la formule de Clausius

$$l' = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{\lambda^3}{4\pi\rho^2}.$$

Pour obtenir la longueur moyenne du chemin libre l, dans le cas où tous les atomes du milieu se meuvent avec la même vitesse, il suffit de multiplier l' par $\frac{3}{4}$, et l'on trouve

$$l = \frac{3}{4}\frac{\lambda^3}{4\pi\rho^2}.$$

Comme la densité du milieu $\delta = \frac{4}{3}\frac{\pi\rho^3}{\lambda^3}$, la formule peut s'écrire

$$l = \frac{1}{4}\frac{\rho}{\delta}.$$

Nous admettons que le rapport $\frac{\rho}{\delta}$ et, par suite, l est une quantité très grande lorsqu'il s'agit du fluide primordial. Par suite, les atomes de ce fluide peuvent se croiser dans tous les sens et les chocs être relativement rares. Nous nommerons *courant* l'ensemble des atomes qui se meuvent ou qui courent dans une direction sensiblement parallèle, et nous prendrons pour mesure de la force impulsive d'un courant la somme des quantités de mouvement des atomes qui traversent sa section droite dans l'unité du temps. Il est clair que deux courants égaux et opposés, agissant sur un corps en repos, se font mutuellement équilibre. De là le nom de *principe d'équilibre des courants* donné au principe exposé dans l'article suivant.

ARTICLE IV.

Principe de l'équilibre des courants.

63. Lorsqu'un milieu, comme l'éon, formé d'atomes élastiques en mouvement, est arrivé à cet état permanent où les chocs ne modifient plus sensiblement la moyenne des vitesses, on peut poser ce principe :

En chaque point du milieu, il passe à tout instant et dans toutes les directions des courants égaux d'atomes.

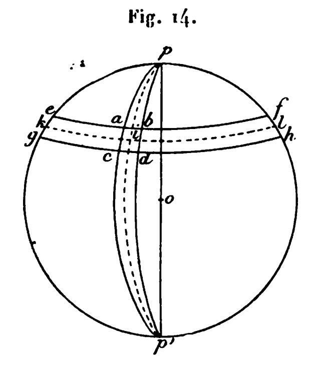
Plusieurs observations sont nécessaires pour préciser le sens de ce principe important.

Évidemment, dans la réalité physique, il ne faut pas entendre les termes, *en chaque point, à tout instant, dans toutes les directions,* avec une rigueur mathématique; mais nous allons faire voir qu'on peut les entendre ainsi, sans inconvénient pour les résultats du calcul et l'explication des phénomènes.

Pour fixer les idées, convenons, au point de vue de la réalité, d'entendre par point une petite sphère ayant pour rayon $\frac{1}{1000}$ de millimètre et par instant $\frac{1}{1000000}$ de seconde. Le point et l'instant physiques seront ainsi pour nous des quantités finies, tandis que le point et l'instant mathématiques sont des infiniment petits.

Du point physique *o* (*fig.* 14), c'est-à-dire du centre de la petite sphère qui lui correspond, décrivons une autre sphère de 1^{m} de rayon, et décomposons sa surface en petits quadrilatères curvilignes par deux séries de plans : 1° des méridiens se coupant suivant le diamètre pp' et faisant entre eux un angle de 10′; 2° des parallèles coupant l'axe polaire pp' de millimètre en millimètre. Le nombre de quadrilatères déterminés sur la surface de la sphère par ces deux séries de cercles $= 2000 \times 360 \times 6 = 4320000$. D'ailleurs, ils sont tous

Fig. 14.



équivalents; car deux parallèles consécutifs *ef*, *gh* interceptent sur la sphère des zones équivalentes, et chaque zone est partagée en segments égaux par les méridiens équidistants. Donc, l'un de ces quadrilatères, tels que *abcd*, a pour surface

$$\frac{4\pi}{4320000} = 0{,}0000029 \text{ ou environ } 3^{\text{mmq}}.$$

Ceci posé, nous appelons *courant élémentaire* passant en *o* un courant composé de tous les atomes qui traversent l'un des quadrilatères et atteignent le point *o*. Nous avons ainsi 4320000 courants passant en *o*, et ils peuvent être considérés comme égaux; car les quadrilatères sont tous équivalents et ont une surface assez grande pour laisser passer en moyenne le même nombre d'atomes dans le même temps.

Menons maintenant le méridien pip' bissecteur du dièdre $app'b$ et le parallèle *kil* situé à égale distance des plans *eaf*, *gch*. Nous partagerons ainsi *abcd* en quatre petits quadrilatères équivalents entre eux, et nous pourrons, sans erreur ap-

préciable, considérer la force du courant, qui répond à *abcd*, comme la résultante de quatre courants égaux répondant aux quatre nouveaux quadrilatères. Chacun de ceux-ci pourrait semblablement se décomposer en quatre autres, et ainsi de suite. Donc, on peut dans les calculs supposer des courants en nombre indéfini dans toutes les directions.

Pareillement, puisqu'en moyenne chaque courant envoie le même nombre d'atomes en *o*, par millionième de seconde, on pourrait supposer, sans modifier les résultats, que, dans un temps *n* fois moindre, il en envoie constamment *n* fois moins et calculer comme si l'instant était un véritable infiniment petit.

Cependant une objection sérieuse se présente ici contre la décomposition indéfinie de l'espace et du temps.

Soit N le nombre d'atomes du courant élémentaire qui traversent le quadrilatère *abcd* en $\frac{1}{1000000}$ de seconde. Nous pouvons bien supposer *abcd* divisé en N parties équivalentes, dont chacune laisse passer un atome; mais pouvons-nous pousser la division plus loin? Les petits éléments de surface ne laisseraient passer alors que des fractions d'atome, ce qui est contradictoire avec la notion même d'atome; mais observons que nous n'aurons recours à ces décompositions abstraites des courants que pour estimer leur force. Or, si l'atome est indivisible, sa force ou sa quantité de mouvement ne l'est pas. Elle est, au contraire, divisible à l'infini, et c'est sur elle que nous opérons. Donc, le procédé est légitime.

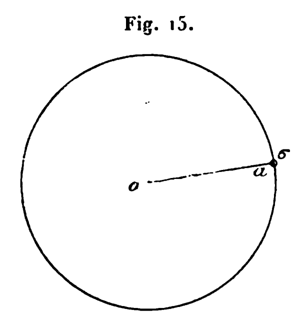
La difficulté relative à la division du temps est du même genre et se résout de la même manière.

64. La possibilité de la décomposition indéfinie des courants, comme méthode de calcul, nous permet de supposer que chaque point, ou mieux, chaque élément infinitésimal de la surface d'un corps plongé dans le milieu en reçoit dans toutes les directions; et en groupant ensemble tous ceux qui atteignent la surface dans une même direction, nous formons des faisceaux de courants parallèles que nous pouvons considérer comme les éléments de la force totale qui agit sur le corps. Nous emploierons de préférence ce mode de décomposition des courants en faisceaux parallèles.

Observons en outre que la direction oa d'un faisceau n'est pas une ligne mathématique, que le point a (*fig.* 15) est un élément superficiel σ d'une sphère ayant pour rayon l'unité et que, par suite, la direction oa comprend toutes les lignes partant du point o pour aboutir à cet élément.

Comme dernier éclaircissement sur le principe en question, j'ajouterai que, malgré les chocs inévitables dans les croisements, les courants ne sont pas altérés et marchent sans s'affaiblir. Si chacun d'eux, par expansion latérale, envoie de ses atomes dans la direction des autres, il en reçoit en égal nombre, animés des mêmes vitesses, et il y a compensation.

Fig. 15.



Du reste, le principe de la conservation de l'énergie, joint à la symétrie des actions mécaniques, conduit au même résultat. A raison de la symétrie, si l'un des courants est modifié, tous les autres doivent l'être de la même manière et, par suite, ils sont tous égaux, après comme avant le croisement; or ils ne peuvent être tous affaiblis ou renforcés, sans que la somme des énergies soit altérée; donc ils conservent leur intensité première.

Si l'on suppose un des courants qui se croisent plus faible ou plus fort que les autres, il y aura altération dans le croisement. Le plus faible recevant par expansion latérale plus qu'il ne donne se renforcera, et le plus fort donnant plus qu'il ne reçoit s'affaiblira, de sorte que la rencontre de ces courants aura pour effet de les ramener peu à peu à l'égalité et de rétablir l'équilibre détruit par une influence étrangère.

Dans les calculs qui vont suivre et qui ont pour objet d'ap-

précier l'action des courants éoniens sur un élément plan, nous pourrons donc négliger l'effet des chocs mutuels des atomes, puisqu'ils ne modifient pas sensiblement la force impulsive de ces courants.

ARTICLE V.

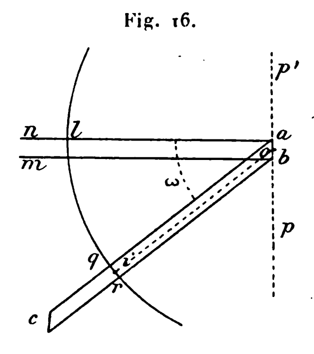
Action de l'éon sur un élément plan en repos.

65. Soient

pp' (*fig.* 15) la trace d'un plan;
ab un élément de ce plan ayant pour surface *s*;
abmn un cylindre droit ayant *s* pour base.

Parmi les atomes compris dans ce cylindre, ceux qui se

Fig. 16.



meuvent dans une direction parallèle aux génératrices vont tous rencontrer l'élément *s*; et l'ensemble de ces atomes constitue un courant dont l'intensité est proportionnelle à la section droite du cylindre et au nombre d'atomes qui la traversent dans l'unité de temps; or ce nombre dépend lui-même de la vitesse variable des différents atomes et, pour simplifier, nous envisagerons d'abord le cas où tous les atomes sont animés de la même vitesse v. Alors le nombre de ceux qui traversent une section droite du cylindre dans le temps t est proportionnel à t et à v, ainsi qu'au nombre N des atomes contenus dans l'unité de volume.

Pour évaluer le nombre de ceux qui viennent heurter ab dans le temps Δt et dans toutes les directions situées à gauche du plan pp', formons un cylindre oblique de base s, dont les génératrices soient parallèles à la droite ac, qui fait un angle ω avec la normale an. Prenons pour arête latérale de ce cylindre une longueur $ac = v\Delta t$. Son volume sera $sv\,\Delta t \cos\omega$, et le nombre des atomes qu'il contient $Nsv\,\Delta t \cos\omega$.

Afin de déterminer ceux qui se meuvent dans la direction ca, décrivons du point o, milieu de ab, comme centre, avec un rayon égal à l'unité et dans le plan nac, un arc de cercle dqr, et fixons notre attention sur l'élément $qr = d\omega$. En tournant autour de an, cet élément décrit une zone dont la surface est $2\pi \sin\omega\, d\omega$; et, si nous appelons ε la portion infiniment petite de cette zone qui a pour centre de symétrie le point i, milieu de qr, ε limitera la direction io ou ca (n° 64), et, comme les atomes contenus dans le cylindre se meuvent indifféremment dans toutes les directions, il y en aura $Nsv\,\Delta t \cos\omega \dfrac{\varepsilon}{4\pi}$ à se mouvoir dans la direction io et, par suite, à atteindre s dans le temps Δt. En réunissant toutes les directions qui correspondent à la zone $2\pi\sin\omega\, d\omega$, on en trouvera

$$Nsv\,\Delta t \cos\omega \frac{\varepsilon}{4\pi}\,\frac{2\pi \sin\omega\, d\omega}{\varepsilon} = \frac{Nsv\,\Delta t}{4}\, 2\cos\omega \sin\omega\, d\omega$$

et, en intégrant de o à $\frac{\pi}{2}$, on aura, pour le nombre total des atomes qui choquent s dans le temps Δt,

$$n = \frac{Nsv\,\Delta t}{4}.$$

La quantité de mouvement du courant (ca) estimée suivant la normale an s'obtient en multipliant $Nsv\,\Delta t \cos\omega \dfrac{\varepsilon}{4\pi}$ par $\mu v \cos\omega$, μ étant la masse d'un atome. La quantité répondant à la zone infinitésimale sera donc

$$\frac{N\mu v^2 s\,\Delta t}{4}\, 2\cos^2\omega \sin\omega\, d\omega$$

et, en intégrant de o à $\frac{\pi}{2}$, on trouvera, pour la quantité totale de mouvement estimée suivant la normale,

$$q = \frac{\mathrm{N}\mu v^2 s\,\Delta t}{6}.$$

Si l'élément s appartient à la surface d'un corps parfaitement élastique et dont la masse est très considérable par rapport à $n\mu$, et si nous convenons d'appeler réaction de l'élément s la réaction du corps tout entier contre les atomes qui choquent cette portion s de la surface, nous pourrons dire que la réaction moyenne de l'élément plan est égale à $\frac{2q}{\Delta t}$; car la réaction d'un plan élastique inébranlable détruit la quantité de mouvement q et la reproduit en sens contraire, de sorte que son effet total est $2q$ dans le temps Δt.

En conséquence, la réaction ou la pression moyenne par unité de surface sera

$$\mathrm{F} = \tfrac{1}{3}\mathrm{N}\mu v^2 = \tfrac{1}{3}\delta v^2.$$

Dans les calculs qui précèdent, les vitesses des atomes sont supposées égales. Essayons maintenant de tenir compte des différences de vitesses. Sur les N atomes contenus dans l'unité de volume, soient $\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2, \mathrm{N}_3, \ldots, \mathrm{N}_i, \ldots, \mathrm{N}_l$ les nombres de ceux qui ont des vitesses $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_i, \ldots, v_l$. Considérons séparément les N_i atomes animés de la vitesse v_i et désignons par n_i et q_i le nombre d'atomes de ce groupe qui choquent s dans le temps Δt et la quantité de mouvement correspondante; nous aurons

$$n_i = \frac{\mathrm{N}_i s . v_i \Delta t}{4}, \qquad q_i = \tfrac{1}{6}\mathrm{N}_i \mu v_i^2 s\,\Delta t.$$

Par suite, les valeurs de n et q seront

$$n = \frac{s\,\Delta t}{4}\sum_1^l \mathrm{N}_i v_i \quad \text{et} \quad q = \frac{s\,\Delta t\,\mu}{6}\sum_1^l \mathrm{N}_i v_i^2;$$

en posant

$$w = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_1^l \mathrm{N}_i v_i \quad \text{et} \quad u^2 = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_1^l \mathrm{N}_i v_i^2,$$

ces formules deviendront

$$n = \frac{N s w \Delta t}{4}, \quad q = \frac{N \mu u^2 s \Delta t}{6}.$$

Elles sont alors identiques à celles que nous avons trouvées plus haut, avec cette seule différence que, dans la première, v est remplacé par la moyenne des vitesses w et que, dans la seconde, v^2 est remplacé par le carré moyen des vitesses u^2. Ceci nous montre que la méthode employée ci-dessus pour calculer n et q est légitime, sous cette réserve que la vitesse commune donnée aux atomes devra varier suivant qu'on se proposera de calculer le nombre des chocs ou la quantité de mouvement. Dans le premier cas, on devra prendre pour vitesse commune w ou la moyenne des vitesses; et, dans le second, on devra prendre u ou la racine du moyen carré des vitesses. On sait d'ailleurs que $w = u \times 0,921$ (nº 61).

ARTICLE VI.

Action de l'éon sur un élément plan en mouvement.

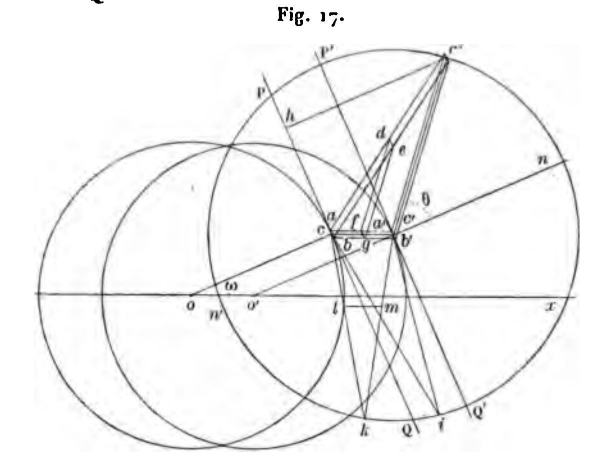
66. Comme la forme du corps auquel appartient l'élément plan peut influer sur le nombre d'atomes éoniens qui l'atteignent dans un parcours donné, nous supposerons, pour ne laisser prise à aucune incertitude, que cet élément appartient à une sphère d'un volume très grand par rapport à celui des atomes du milieu.

Soit donc la sphère o (*fig.* 17) de rayon oc, qui se meut dans la direction ox avec la vitesse V, et soit Δt un temps assez court pour que sa vitesse demeure sensiblement constante dans cet intervalle. Alors chaque point de la sphère parcourt dans le temps Δt une longueur égale à $V\Delta t$. Considérons en particulier le point c et prenons pour plan de la figure le plan de l'angle $cox = \omega$. Le plan tangent en c sera représenté par la droite PQ perpendiculaire au rayon oc, et l'élément tangentiel s par sa projection linéaire acb. Pendant que le centre de la sphère se meut de o en o', l'élément s se transporte avec le plan tangent de c en c' en décrivant un cylindre $aba'b'$, et nous nous

proposons de déterminer le nombre d'atomes éoniens qu'il a rencontrés dans ce parcours, en les supposant tous animés de la même vitesse v.

Pour cela, décrivons du point c' comme centre une sphère de rayon $v\,\Delta t$ et supposons d'abord qu'elle coupe le plan tangent PQ. Elle se trouvera décomposée par les deux plans PQ et P′Q′ en un hémisphère P′nQ′, une zone PQP′Q′ et une calotte Pn'Q.

Fig. 17.



Soit c'' un point de l'hémisphère; menons le rayon $c'c''$ qui fait un angle θ avec la normale $c'n$ et construisons un cylindre cc'' ayant pour base s; sa hauteur $c''h$ est égale à

$$(v\cos\theta + V\cos\omega)\,\Delta t,$$

et le nombre d'atomes éoniens qu'il renferme est

$$Ns(v\cos\theta + V\cos\omega)\,\Delta t.$$

Ceux d'entre eux qui se meuvent dans une direction parallèle à $c''c'$, et ceux-là seuls, atteindront l'élément s dans le parcours cc'. Pour le prouver, construisons un troisième cylindre $defg$ ayant pour bases deux sections des cylindres cc', cc'' parallèles à s et pour génératrices des droites df, eg parallèles à $c'c''$; on a

$$\frac{af}{df} = \frac{cc'}{c''c'} = \frac{V}{v}.$$

Donc les atomes situés sur la section *de*, au moment où l'élément *s* est en *c*, et qui se meuvent parallèlement à *df* avec la vitesse v, atteindront la section *fg* juste à l'instant où l'élément *s* y arrivera avec la vitesse V. D'ailleurs les atomes dirigés dans le même sens et situés en deçà ou au delà de la section *de*, dans le cylindre *df* prolongé, traverseront la section *fg* avant ou après le passage de l'élément plan. Donc le nombre des atomes qui le rencontrent sous l'incidence θ et parallèlement à $c'c''$ dans le parcours cc' est égal à

$$Ns(v\cos\theta + V\cos\omega)\Delta t \frac{\varepsilon}{4\pi}$$

(ε a la même signification que dans l'article précédent).

Si nous réunissons toutes les directions comprises dans un cône d'angle θ ayant pour axe la normale $c'n$, nous trouverons, pour le nombre n des atomes qui rencontrent s,

$$n = \frac{Ns\Delta t}{4}\int_0^\theta 2(v\cos\theta + V\cos\omega)\sin\theta\, d\theta$$
$$= \frac{Ns\Delta t}{4}[v\sin^2\theta + 2V\cos\omega(1-\cos\theta)]$$

et, pour la quantité de mouvement correspondante, estimée suivant la normale,

$$q = \frac{N\mu s\Delta t}{4}\int_0 2(v^2\cos^2\theta + vV\cos\omega\cos\theta)\sin\theta\, d\theta$$
$$= \frac{\delta s\Delta t}{4}[\tfrac{2}{3}v^2(1-\cos^3\theta) + vV\cos\omega\sin^2\theta].$$

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, ces formules deviennent

$$n = \frac{Ns\Delta t}{4}(v + 2V\cos\omega), \quad q = \frac{\delta s\Delta t}{4}(\tfrac{2}{3}v^2 + vV\cos\omega).$$

Mais elles ne comprennent pas la totalité des atomes qui rencontrent *s*. Elles renferment bien tous ceux qui l'atteignent en venant des régions supérieures au plan P′Q′, mais il en est d'autres, situés dans la région comprise entre PQ et P′Q′, qui

rencontrent aussi s ou mieux qui sont rencontrés et poussés par cet élément au moment où ils passent devant lui.

Pour en déterminer le nombre, prenons un point i sur la zone P Q P'Q', joignons ci, $c'i$, construisons le cylindre ic avec s pour base et désignons encore par θ l'angle de ic' avec $c'n$ qui actuellement est obtus. On verra, comme ci-dessus, que le cylindre ic a pour volume

$$s(v\cos\theta + V\cos\omega)\Delta t$$

et que les atomes contenus dans ce volume et dirigés parallèlement à ic' atteignent tous s dans le parcours cc'.

L'angle θ a une limite θ_1 fournie par l'équation

$$V\cos\omega + v\cos\theta = 0, \quad \text{d'où} \quad \cos\theta_1 = -\frac{V\cos\omega}{v},$$

ce qui montre en même temps qu'on doit avoir $v > V\cos\omega$ pour que la sphère $c'c''$ coupe le plan PQ.

En prenant les intégrales qui donnent n et q jusqu'à la limite θ_1, on trouve

$$(1) \quad \begin{cases} n = \dfrac{Ns\Delta t}{4}\left[v + 2V\cos\omega + \dfrac{V^2\cos^2\omega}{v}\right], \\ q = \dfrac{\delta s\,\Delta t}{4}\left[\frac{2}{3}v^2 + vV\cos\omega - \dfrac{V^3\cos^3\omega}{3v}\right]. \end{cases}$$

Considérons enfin un point k situé sur la calotte Pn'Q. Joignons ck, $c'k$ et imaginons le cylindre $c'k$ analogue à cc''. Je dis qu'aucun atome de ce cylindre ne peut atteindre l'élément s. Suivons d'abord le mouvement d'un atome qui part du point k dans la direction kc' en même temps que s part du point c. S'il ne rencontrait pas d'obstacle, il arriverait en c' avec s, mais il sera dévié en chemin. En effet, si par le point l, où la droite kc coupe la sphère O, on mène lm parallèle à cc', on a

$$\frac{km}{lm} = \frac{kc'}{cc'} = \frac{v}{V}.$$

Donc l'atome parti du point k arrivera en m avec l'élément superficiel l et sera choqué en ce point, donc il ne parviendra pas en c'. Le même raisonnement s'appliquerait à tout autre

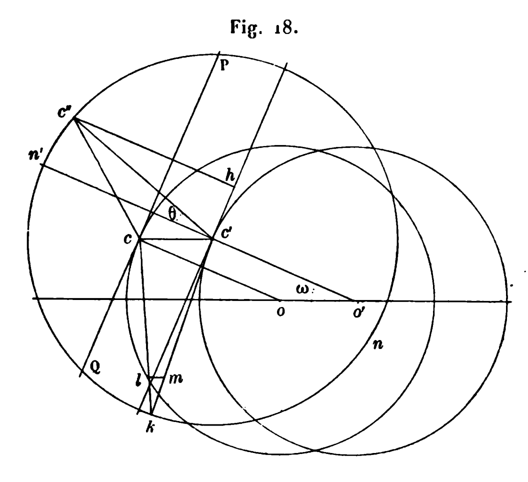
atome du cylindre ck dirigé parallèlement à kc'. Donc aucun atome éonien n'atteint s dans cette direction et, par suite, aucun atome venant des régions inférieures à PQ ne peut le rencontrer dans le parcours cc'. Les formules (1) sont donc complètes dans l'hypothèse $v > V \cos\omega$.

Dans l'hypothèse $v \leqq V \cos\omega$, la sphère décrite avec $v\Delta t$ pour rayon est tout entière au-dessus du plan PQ et l'angle limite θ_1 peut croître jusqu'à π. Les deux intégrales prises de o à π donnent alors les valeurs suivantes :

$$(2) \qquad n' = N s \Delta t V \cos\omega, \quad q' = \delta s \Delta t \frac{v^2}{3}.$$

67. Les formules (1) et (2) s'appliquent au cas où l'élément s appartient à la face antérieure de la sphère mobile. Examinons maintenant le cas où il est situé sur la face postérieure, au point c (*fig.* 18). Comme ci-dessus, il décrit un

Fig. 18.



cylindre cc' pendant que le centre o parcourt la longueur $oo' = V\Delta t$, et le plan PQ tangent en c partage la sphère décrite du point c' comme centre avec $v\Delta t$ pour rayon en deux calottes Pn'Q et PnQ.

Aucun atome situé dans celle-ci ne peut atteindre s dans le parcours cc'. En effet, si un atome parti du point k, par exemple, se dirigeait vers c', il serait heurté en chemin par la

sphère o en un point m déterminé comme dans le paragraphe précédent, et il en serait de même de tout atome contenu dans le cylindre ck de base s, et dirigé parallèlement à kc'. Comme le point k est un point quelconque de la calotte PnQ, il s'ensuit qu'aucun atome venant des régions inférieures au plan PQ ne peut rencontrer l'élément s.

Au contraire, un atome parti du point c'' de la calotte Pn'Q et marchant vers c' y arrivera sans encombre en même temps que s, et tous les atomes du cylindre cc'', construit sur s comme base, qui se meuvent dans la direction $c''c'$, rencontreront aussi s dans le parcours cc'. Leur nombre est

$$Ns(v\cos\theta - V\cos\omega)\Delta t\,\frac{\varepsilon}{4\pi},$$

et, si l'on réunit toutes les directions comprises dans un cône d'angle θ, ayant pour axe la normale $c'n'$, on trouvera

$$\begin{aligned} n &= \frac{Ns\,\Delta t}{4}\int_0^\theta 2(v\cos\theta - V\cos\omega)\sin\theta\, d\theta \\ &= \frac{Ns\,\Delta t}{4}[v\sin^2\theta - 2V\cos\omega(1-\cos\theta)], \\ q &= \frac{\delta s\,\Delta t}{4}\int_0^\theta 2(v^2\cos^2\theta - vV\cos\omega\cos\theta)\sin\theta\, d\theta \\ &= \frac{\delta s\,\Delta t}{4}[\tfrac{2}{3}v^2(1-\cos^3\theta) - vV\cos\omega\sin^2\theta]. \end{aligned}$$

Les constructions de notre figure supposent $v\cos\theta > V\cos\omega$ ou $\cos\theta > \frac{V\cos\omega}{v}$. En donnant à θ sa valeur limite

$$\theta_1 = \arc\cos\frac{V\cos\omega}{v},$$

on aura

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} n'' &= \frac{Ns\,\Delta t}{4}\left(v - 2V\cos\omega + \frac{V^2\cos^2\omega}{v}\right), \\ q'' &= \frac{\delta s\,\Delta t}{4}\left(\tfrac{2}{3}v^2 - vV\cos\omega + \frac{V^3\cos^3\omega}{3v}\right). \end{aligned}\right.$$

Dans le cas où l'on aurait $v \lesseqgtr V\cos\omega$, la calotte Pn'Q n'existe-

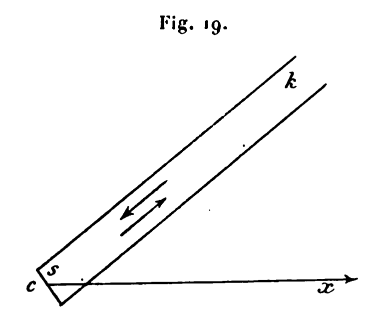
rait plus et aucun atome éonien n'atteindrait plus s, de sorte qu'on aurait

$$n = 0 \quad \text{et} \quad q = 0.$$

68. Dans tout le cours de cet article, nous avons supposé que l'élément plan appartenait à un corps dont la masse était très grande par rapport à celle des atomes éoniens. Il en résulte que ceux-ci, après l'avoir choqué, rebondissent et s'enfuient dans toutes les directions; et, si nous faisons abstraction de leurs collisions mutuelles, les courants qui amènent à chaque instant de nouveaux atomes au contact du mobile sont toujours identiques à eux-mêmes en vertu de l'homogénéité du milieu.

Les chocs interatomiques ne modifient pas sensiblement cette identité. Considérons en effet dans le cylindre ck (*fig.* 19) le courant des atomes réfléchis qui s'éloignent de s

Fig. 19.



avec une vitesse $v + v'$ et le courant des atomes qui s'approchent avec la vitesse v. Sans doute, s'il y a des rencontres, quelques-uns des premiers pourront rebrousser chemin, mais un égal nombre des seconds retourneront en arrière, et, d'autre part, il y aura en moyenne échange de vitesses.

Nous avons donc pu, sans erreur sensible, négliger ces chocs dans les calculs qui précèdent, où nous considérons un mobile isolé; mais, si deux mobiles étaient en présence, les atomes que l'un d'eux réfléchirait vers l'autre auraient leurs vitesses modifiées et il faudrait nécessairement tenir compte de cette modification. C'est, du reste, le seul moyen d'ex-

pliquer l'influence réciproque des deux mobiles par l'intermédiaire du milieu, sans action à distance.

Nous observerons encore ici, comme à la fin de l'article précédent, que, pour maintenir les formules dans le cas général où les vitesses des atomes sont différentes, il faut remplacer v par la vitesse moyenne et v^2 par le carré moyen des vitesses. Il faudrait aussi remplacer $\frac{1}{v}$ par la valeur moyenne des inverses des vitesses.

Outre les valeurs de q et de n, si nous voulons déterminer la réaction de l'élément plan ou la pression P qu'il supporte, rapportée à l'unité de temps et de surface, nous aurons, pour $v > V\cos\omega$,

$$\begin{aligned} P &= \frac{2q + 2n\mu V\cos\omega}{s\,\Delta t} \\ &= \delta\left(\frac{1}{3}v^2 + vV\cos\omega + V^2\cos^2\omega + \frac{1}{3}\,\frac{V^3\cos^3\omega}{v}\right) \end{aligned}$$

et, pour $v \overline{\overline{<}} V\cos\omega$,

$$P = \delta\left(\tfrac{2}{3}v^2 + 2V^2\cos^2\omega\right).$$

Ces deux formules conviennent au cas où l'élément appartient à la face antérieure du mobile. Lorsqu'il appartient à la face postérieure, on a, pour $v > V\cos\omega$,

$$P = \delta\left(\frac{1}{3}v^2 - vV\cos\omega + V^2\cos^2\omega - \frac{1}{3}\,\frac{V^3\cos^3\omega}{v}\right)$$

et, pour $\overline{\overline{<}} V\cos\omega$,

$$P = 0.$$

CHAPITRE IV.

L'ÉTHER ET SES RAPPORTS AVEC L'ÉON.

ARTICLE I.

L'éther en repos au sein de l'éon.

69. L'éther est, comme l'éon, un fluide composé d'atomes sphériques parfaitement élastiques et uniformément répandus dans l'espace, au moment de leur création.

La différence spécifique entre ces deux fluides consiste en ce que le volume des atomes éoniens est beaucoup plus petit que celui des atomes d'éther. Nous admettons que ces derniers occupent un volume capable de contenir des milliers, peut-être des millions d'atomes d'éon, conservant entre eux leurs distances respectives.

Puisque l'atome d'éther est relativement si volumineux, sa surface doit être incessamment frappée par les courants éoniens, et, dans un temps très court Δt, on peut le concevoir recevant des chocs égaux dans toutes les directions. Cependant, comme ces chocs ne sont pas en toute rigueur exactement simultanés aux extrémités de chaque diamètre, le centre de l'atome doit éprouver des oscillations infinitésimales autour de sa position d'équilibre. Sa surface doit être aussi le siège d'une agitation continue et ressentir comme un léger frémissement, semblable aux rides imperceptibles qui effleurent une goutte de rosée.

Nous signalons ces impressions fugitives dans l'atome d'éther, pour conserver intacts tous les droits de la vérité; nous pouvons néanmoins, sans erreur appréciable, le considérer comme immobile et jouissant d'un véritable équilibre.

Le point important à noter, c'est que les courants de l'éon,

après avoir frappé un atome d'éther en repos, rebroussent chemin sans perte de force, et que, par suite, sa présence ne modifie pas le principe de l'équilibre des courants (n° 63).

Deux atomes d'éther *a* et *b*, placés en face l'un de l'autre, ne le modifieront pas davantage. Au premier abord, il semble que l'atome *a* ne sera plus également choqué dans toutes les directions, puisque l'atome *b* interceptera des courants qui devaient et qui ne pourront pas l'atteindre. Mais, pour tout courant intercepté d'un côté, il y aura de l'autre côté un courant réfléchi de même direction qui le remplacera; donc la présence simultanée de deux atomes ne troublera point leur équilibre et ne modifiera pas notre principe. On peut appliquer le même raisonnement à un nombre quelconque d'atomes, et, par suite, nous pouvons concevoir à l'origine le fluide éthéré uniformément répandu dans l'espace et jouissant d'un véritable équilibre, quoique plongé dans un océan où se croisent sans cesse des courants animés de vitesses prodigieuses.

ARTICLE II.

Calcul de la résistance qu'éprouve un atome d'éther, en mouvement au sein de l'éon.

70. La résistance éprouvée par un mobile se mesure en prenant le rapport $\frac{M\,\Delta V}{\Delta t}$ de la variation de la quantité de mouvement à la variation du temps. Or, dans le cas actuel, le facteur ΔV dépend de la série des chocs que l'atome d'éther reçoit des atomes éoniens dans le temps Δt, et nous pouvons toujours supposer cet intervalle assez court pour que la somme de toutes les masses μ qui choquent l'atome d'éther soit très petite par rapport à la masse M de celui-ci. Donc, pour calculer l'effet résultant de toutes les rencontres individuelles, il nous est permis d'employer les formules du choc simultané (n° 54). De plus, ces formules se réduisent ici à une seule; car, vu la densité uniforme de l'éon et les mouvements symétriques de ses atomes en tous sens, la direction ox (*fig.* 17) de la vitesse V de l'atome d'éther est un axe principal d'inertie de la somme des masses choquantes $\Sigma\mu$, et la

vitesse V', après le choc, est donnée par la formule

$$V' = \frac{V(M - \Sigma\mu x^2) + 2\Sigma\mu v x}{M + \Sigma\mu x^2},$$

dans laquelle le signe Σ s'étend à tous les éléments superficiels de l'atome d'éther et x désigne $\cos\omega$. On en tire

$$V' - V = \Delta V = \frac{-2V\Sigma\mu x^2 + 2\Sigma\mu v x}{M + \Sigma\mu x^2}$$

et, si l'on néglige $\Sigma\mu x^2$ en face de M, on trouve

$$\frac{M\Delta V}{\Delta t} = -2V\frac{\Sigma\mu x^2}{\Delta t} + \frac{2\Sigma\mu v x}{\Delta t},$$

de sorte que le calcul de la résistance revient au calcul de $\frac{\Sigma\mu x^2}{\Delta t}$ et $\frac{\Sigma\mu v x}{\Delta t}$.

Premier cas : $v > V$. — Dans ce cas, nous aurons recours aux formules (1) et (3) (nos 66 et 67), et, en réunissant les valeurs de n et n'', de q et q'' qui répondent au même angle ω, nous trouverons

$$n + n'' = \frac{Ns\Delta t}{2}\left(v + \frac{V^2\cos^2\omega}{v}\right),$$

$$-q + q'' = -\frac{\delta s\Delta t}{2}\left(vV\cos\omega - \frac{V^3\cos^3\omega}{3v}\right).$$

Nous prenons q avec le signe —, parce que nous supposons la vitesse V positive, et nous avons estimé q en sens contraire.

Si maintenant nous multiplions par $\frac{2\pi r^2\sin\omega\, d\omega}{s}$ pour embrasser tous les éléments de l'atome d'éther qui répondent au même angle ω et si ensuite nous intégrons de o à $\frac{\pi}{2}$, nous aurons

$$\frac{\Sigma\mu x^2}{\Delta t} = \pi r^2\delta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(v + \frac{V^2\cos^2\omega}{v}\right)\cos^2\omega\sin\omega\, d\omega$$

$$= \pi r^2\delta\left(\frac{v}{3} + \frac{V^2}{5v}\right),$$

puis

$$\frac{\Sigma \mu v x}{\Delta t} = -\pi r^2 \delta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(cV \cos\omega - \frac{V^3 \cos^3\omega}{3c} \right) \cos\omega \sin\omega \, d\omega$$

$$= -\pi r^2 \delta \frac{c}{3} \left(V - \frac{V^3}{5c^2} \right),$$

d'où enfin

$$\frac{M \Delta V}{\Delta t} = -\frac{4}{3} \pi r^2 \delta c V \left(1 + \frac{V^2}{5c^2} \right).$$

71. Deuxième cas : $c < V$. — Dans ce cas, nous devrons employer les formules (2) (n° 66) depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = \arccos \frac{c}{V} = \omega'$ et les formules (1) et (3) de ω' à $\frac{\pi}{2}$. De cette sorte nous trouverons

$$\sum \frac{\mu x^2}{\Delta t} = \pi r^2 \delta \left[\int_0^{\omega'} 2V \cos^3\omega \sin\omega \, d\omega + \int_{\omega'}^{\frac{\pi}{2}} \left(c - \frac{V^2 \cos^2\omega}{c} \right) \cos^2\omega \sin\omega \, d\omega \right]$$

$$= \pi r^2 \delta \frac{V}{2} \left(1 + \frac{c^4}{15 V^4} \right),$$

$$\sum \frac{\mu v x}{\Delta t} = -\pi r^2 \delta \left[\int_0^{\omega'} \tfrac{2}{3} c^2 \cos\omega \sin\omega \, d\omega + \int_{\omega'}^{\frac{\pi}{2}} \left(cV \cos\omega - \frac{V^3 \cos^3\omega}{3c} \right) \cos\omega \sin\omega \, d\omega \right]$$

$$= -\pi r^2 \delta \frac{c^2}{3} \left(1 - \frac{1}{5} \frac{c^2}{V^2} \right),$$

et finalement

$$M \frac{\Delta V}{\Delta t} = -\pi r^2 \delta V^2 \left(1 + \frac{2}{3} \frac{c^2}{V^2} - \frac{1}{15} \frac{c^4}{V^4} \right).$$

Comme cela devait être, les d[illegible] de la résistan

se fondent en une seule pour le cas limite où $v = V$, et deviennent

$$M\frac{\Delta V}{\Delta t} = -\frac{8}{5}\pi r^2 \delta V^2.$$

Nota. — Nous ne prétendons pas assimiler la résistance éprouvée par l'atome d'éther au sein de l'éon à celle qu'éprouve un boulet en traversant l'air; cependant, au point de vue de la théorie mécanique des gaz, il y a des analogies suffisantes entre les deux phénomènes, pour nous porter à croire qu'il est impossible de représenter par une formule unique la résistance de l'air au mouvement des projectiles. Il doit exister deux formules distinctes, suivant que la vitesse du boulet est inférieure ou supérieure à celle des molécules d'air. Mais, tandis que la densité de l'éon et la vitesse de ses atomes peuvent être regardées comme constantes, la densité de l'air varie autour du projectile qui le comprime en avant et le raréfie en arrière, et la vitesse de ses molécules croît avec l'échauffement qui résulte de sa compression. Cette double variation tend à augmenter la résistance, et elle devrait être déterminée tout d'abord, si l'on voulait établir des formules théoriques exactes.

ARTICLE III.

Lois du mouvement d'un atome d'éther isolé au sein de l'éon.

72. Les lois du mouvement d'un atome d'éther isolé, au sein de l'éon, sont comprises dans la formule

$$M\frac{dV}{dt} = -\frac{4}{3}\pi r^2 \delta v V\left(1 + \frac{V^2}{5v^2}\right),$$

qui convient au cas où l'on a $v > V$; et, comme $M = \frac{4}{3}\pi r^3$, on en déduit, en posant $\frac{\delta v}{r} = k$,

$$\frac{dV}{dt} = -kV\left(1 + \frac{V^2}{5v^2}\right)$$

puis

$$\frac{\Sigma \mu v . x}{\Delta t} = -\pi r^2 \delta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(v \mathrm{V} \cos\omega - \frac{\mathrm{V}^3 \cos^3\omega}{3v} \right) \cos\omega \sin\omega \, d\omega$$

$$= -\pi r^2 \delta \frac{v}{3} \left(\mathrm{V} - \frac{\mathrm{V}^3}{5v^2} \right),$$

d'où enfin

$$\frac{\mathrm{M}\Delta \mathrm{V}}{\Delta t} = -\frac{4}{3} \pi r^2 \delta v \mathrm{V} \left(1 + \frac{\mathrm{V}^2}{5v^2} \right).$$

71. Deuxième cas : $v < \mathrm{V}$. — Dans ce cas, nous devrons employer les formules (2) (n° 66) depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = \arccos \frac{v}{\mathrm{V}} = \omega'$ et les formules (1) et (3) de ω' à $\frac{\pi}{2}$. De cette sorte nous trouverons

$$\sum \frac{\mu x^2}{\Delta t} = \pi r^2 \delta \left[\int_0^{\omega'} 2 \mathrm{V} \cos^3\omega \sin\omega \, d\omega \right.$$
$$\left. + \int_{\omega'}^{\frac{\pi}{2}} \left(v + \frac{\mathrm{V}^2 \cos^2\omega}{v} \right) \cos^2\omega \sin\omega \, d\omega \right]$$
$$= \pi r^2 \delta \frac{\mathrm{V}}{2} \left(1 + \frac{v^4}{15\mathrm{V}^4} \right),$$

$$\sum \frac{\mu v x}{\Delta t} = -\pi r^2 \delta \left[\int_0^{\omega'} \frac{2}{3} v^2 \cos\omega \sin\omega \, d\omega \right.$$
$$\left. + \int_{\omega'}^{\frac{\pi}{2}} \left(v \mathrm{V} \cos\omega - \frac{\mathrm{V}^3 \cos^3\omega}{3v} \right) \cos\omega \sin\omega \, d\omega \right]$$
$$= -\pi r^2 \delta \frac{v^2}{3} \left(1 - \frac{1}{5} \frac{v^2}{\mathrm{V}^2} \right),$$

et finalement

$$\mathrm{M} \frac{\Delta \mathrm{V}}{\Delta t} = -\pi r^2 \delta \mathrm{V}^2 \left(1 + \frac{2}{3} \frac{v^2}{\mathrm{V}^2} - \frac{1}{15} \frac{v^4}{\mathrm{V}^4} \right).$$

Comme cela devait être, les deux valeurs de la résistance

se fondent en une seule pour le cas limite où $v = V$, et deviennent

$$M \frac{\Delta V}{\Delta t} = -\tfrac{8}{5}\pi r^2 \delta V^2.$$

Nota. — Nous ne prétendons pas assimiler la résistance éprouvée par l'atome d'éther au sein de l'éon à celle qu'éprouve un boulet en traversant l'air ; cependant, au point de vue de la théorie mécanique des gaz, il y a des analogies suffisantes entre les deux phénomènes, pour nous porter à croire qu'il est impossible de représenter par une formule unique la résistance de l'air au mouvement des projectiles. Il doit exister deux formules distinctes, suivant que la vitesse du boulet est inférieure ou supérieure à celle des molécules d'air. Mais, tandis que la densité de l'éon et la vitesse de ses atomes peuvent être regardées comme constantes, la densité de l'air varie autour du projectile qui le comprime en avant et le raréfie en arrière, et la vitesse de ses molécules croît avec l'échauffement qui résulte de sa compression. Cette double variation tend à augmenter la résistance, et elle devrait être déterminée tout d'abord, si l'on voulait établir des formules théoriques exactes.

ARTICLE III.

Lois du mouvement d'un atome d'éther isolé au sein de l'éon.

72. Les lois du mouvement d'un atome d'éther isolé, au sein de l'éon, sont comprises dans la formule

$$M \frac{dV}{dt} = -\frac{4}{3}\pi r^2 \delta v V\left(1 + \frac{V^2}{5v^2}\right),$$

qui convient au cas où l'on a $v > V$; et, comme $M = \frac{4}{3}\pi r^3$, on en déduit, en posant $\frac{\delta v}{r} = k$,

$$\frac{dV}{dt} = -kV\left(1 + \frac{V^2}{5v^2}\right)$$

et l'intégration de cette équation différentielle donne

$$V = \frac{V_0 e^{-kt}}{\sqrt{1 + \frac{V_0^2}{5v^2}(1 - e^{-2kt})}},$$

expression dans laquelle V_0 désigne la vitesse de l'atome à l'origine du temps.

Comme nous supposerons toujours V_0 excessivement petit par rapport à v, nous négligerons le rapport $\frac{V_0^2}{v^2}$ en face de l'unité. Par suite de cette simplification, la formule devient

$$V = V_0 e^{-kt}.$$

On en tire, pour l'espace parcouru dans le temps t,

$$x = \frac{V_0}{k}(1 - e^{-kt}).$$

Ces deux formules montrent que la vitesse de l'atome d'éther diminue indéfiniment avec le temps et que l'espace parcouru tend vers la limite $\frac{V_0}{k}$.

L'équation différentielle simplifiée peut aussi se mettre sous la forme

$$dV = -k\,dx, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{V_0 - V}{k}.$$

On trouve encore, en résolvant par rapport au temps,

$$t = \frac{1}{k} \log \frac{V_0}{V}.$$

En un mot, parmi les trois variables V, x, t, on peut prendre n'importe laquelle pour variable indépendante, et l'on exprime facilement les deux autres en fonction de celle-là.

Si la valeur de la constante k était connue, tout serait déterminé dans les équations précédentes; mais elle dépend des trois quantités δ, v, r qui sont également inconnues. D'après nos hypothèses, la densité absolue de l'éon δ est tout à fait petite; mais, d'autre part, le rapport $\frac{v}{r}$ doit être excessivement

grand, de sorte que le produit $k = \frac{\delta v}{r}$ nous apparaît présentement comme indéterminé et l'étude des phénomènes physiques peut seule nous conduire à nous prononcer sur sa valeur approchée.

Si nous le considérions comme très grand, la vitesse V deviendrait insensible au bout d'un temps très court. Par suite, l'éther, au milieu de l'éon, serait comparable à un solide immense, puisque ses éléments ne pourraient se déplacer sensiblement qu'avec une extrême difficulté. Ainsi se trouverait réalisée cette assimilation de l'éther à un solide, mise en avant par plusieurs géomètres, comme Cauchy, Lamé, etc., pour expliquer les lois de son élasticité. Nous nous rangeons volontiers à leur avis, et nous accorderons provisoirement à k une valeur considérable, en attendant que nous puissions la préciser davantage.

ARTICLE IV.

Vitesse et nombre des atomes éoniens réfléchis par un atome d'éther en mouvement.

73. Soit l'atome d'éther O, de masse M, en mouvement dans la direction ox avec la vitesse V; considérons un atome éonien de masse μ qui frappe l'élément s situé en c, avec la vitesse v et dans la direction ac qui fait avec la normale cn l'angle θ (*fig.* 20). La composante normale de sa vitesse est $v\cos\theta$, et, si nous désignons par w la valeur de cette composante après le choc et par ω l'angle cox, nous aurons

$$w = v\cos\theta + 2V\cos\omega.$$

Si maintenant nous appelons u la vitesse totale de l'atome après le choc et φ l'angle que fait sa direction avec la normale cn, nous trouverons

$$u = \sqrt{w^2 + v^2\sin^2\theta} = \sqrt{v^2 + 4vV\cos\omega\cos\theta + 4V^2\cos^2\omega}$$

et

$$\sin\varphi = \frac{v\sin\theta}{u}.$$

Cette dernière équation donne

$$\sin^2\varphi(v^2 + 4vV\cos\omega\cos\theta + 4V^2\cos^2\omega) = v^2(1 - \cos^2\theta);$$

d'où

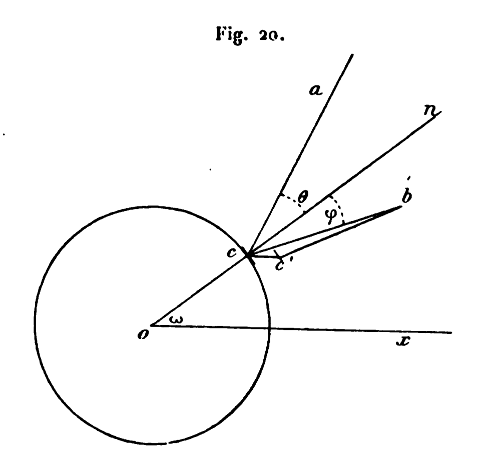
$$v\cos\theta = -2V\cos\omega\sin^2\varphi \pm \cos\varphi\sqrt{v^2 - 4V^2\cos^2\omega\sin^2\varphi}.$$

Lorsqu'on a $0 < \frac{\pi}{2}$, $v\cos\theta$ est positif et l'on doit prendre le signe + devant le radical. En portant cette valeur de $v\cos\theta$, dans l'expression de u, on obtient

$$u = \sqrt{v^2 - 4V^2\cos^2\omega\sin^2\varphi} + 2V\cos\omega\cos\varphi.$$

Cette vitesse se rapporte aux atomes éoniens qui choquent la face antérieure du mobile, dans un sens opposé à V.

Fig. 20.



Le nombre de ces atomes réfléchis par l'élément s dans le temps Δt, sous l'angle φ, est égal au nombre d'atomes incidents sous l'angle θ, et par conséquent dans une seule direction (66), il égale

$$Ns(v\cos\theta + V\cos\omega)\,\Delta t\,\frac{\varepsilon}{4\pi}$$
$$= \frac{Ns\varepsilon}{4\pi}\Delta t\left(V\cos\omega\cos2\varphi + \cos\varphi\sqrt{v^2 - 4V^2\cos^2\omega\sin^2\varphi}\right).$$

Pour les atomes qui frappent la face postérieure du mobile,

leur vitesse avant le choc est toujours de même sens que V, et l'on a pour eux

$$w = -v\cos\theta + 2V\cos\omega,$$
$$u = -\sqrt{v^2 - 4vV\cos\omega\cos\theta + 4V^2\cos^2\omega}$$

et

$$\sin\varphi = \frac{v\sin\theta}{-u};$$

d'où l'on déduit

$$v\cos\theta = 2V\cos\omega\sin^2\varphi + \cos\varphi\sqrt{v^2 - 4V^2\cos^2\omega\sin^2\varphi}$$

et

$$u = -\left(\sqrt{v^2 - 4V^2\cos^2\omega\sin^2\varphi} - 2V\cos\omega\cos\varphi\right).$$

Le nombre de ces atomes réfléchis par un élément s, sous l'angle φ et dans une seule direction, est

$$\frac{Ns\varepsilon}{4\pi}\Delta t\left(-V\cos\omega\cos2\varphi + \cos\varphi\sqrt{v^2 - 4V^2\cos^2\omega\sin^2\varphi}\right).$$

Comme dans tous les calculs subséquents, nous supposerons le rapport $\frac{V}{v}$ assez petit pour que son carré soit négligeable, nous pouvons introduire immédiatement cette simplification dans les formules précédentes et nous trouvons ainsi, pour le nombre des atomes réfléchis par un élément de la face antérieure sous l'angle φ et dans une seule direction,

$$\frac{Ns\varepsilon}{4\pi}\Delta t(v\cos\varphi + V\cos\omega\cos2\varphi).$$

Cette formule pourrait convenir aussi aux éléments de la face postérieure du mobile, pourvu qu'on fît varier ω de $0°$ à $180°$; ω représenterait, en tout cas, l'angle de la direction du mouvement ox avec le rayon qui aboutirait à l'élément superficiel considéré.

Avec la même convention, la vitesse des atomes réfléchis serait toujours exprimée en valeur absolue par la formule unique

$$u = v + 2V\cos\omega\cos\varphi.$$

74. Observons de plus que la densité δ de l'éon n'est pas modifiée autour de l'atome d'éther, toujours, bien entendu, dans l'hypothèse où le rapport $\frac{V}{v}$ est très petit. Pour le faire voir, comparons la densité δ'' du courant réfléchi dans la direction cb avec la densité δ' du courant incident ac.

Le nombre des atomes réfléchis sous l'angle φ dans le temps Δt est le même que le nombre des atomes incidents sous l'angle θ. D'autre part, le volume qui contient ceux-ci est (66)

$$s(v\cos\theta + V\cos\omega)\,\Delta t,$$

et le volume qui contient ceux-là est

$$s(u\cos\varphi - V\cos\omega)\,\Delta t;$$

car, pendant que l'élément s parcourt la longueur $CC' = V\Delta t$, les atomes réfléchis en c se sont transportés en b, à la distance $cb = u\,\Delta t$, et tous ceux qui ont été réfléchis dans l'intervalle Δt sont compris dans le cylindre ayant s pour base et $c'b$ pour arête et, par suite, $(u\cos\varphi - V\cos\omega)\,\Delta t$ pour hauteur.

Or, pour des nombres égaux d'atomes ou pour des masses égales, les densités sont en raison inverse des volumes.

Donc

$$\frac{\delta'}{\delta''} = \frac{s(u\cos\varphi - V\cos\omega)\,\Delta t}{s(v\cos\theta + V\cos\omega)\,\Delta t} = 1.$$

Donc $\delta' = \delta''$, et par suite la densité du courant réfléchi égale la densité du courant incident. Or l'homogénéité de l'éon ne pouvait être troublée que par une différence entre δ' et δ''. Donc la densité δ de l'éon demeure constante.

ARTICLE V.

Rapport d'un atome d'éther en repos avec un élément plan.

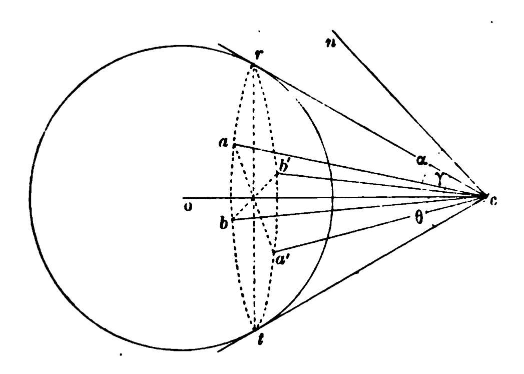
75. Pour nous qui rejetons toute action à distance, un atome d'éther ne peut entrer en rapport avec un élément plan s que par l'intermédiaire des courants éoniens qu'il réfléchit vers cet élément. L'article présent a donc pour but

de déterminer le nombre n d'atomes de ces courants qui atteignent s dans le temps Δt et leur quantité de mouvement q estimée suivant la normale. Or un atome d'éther en repos ne modifie pas l'état de l'éon et les courants qu'il réfléchit sont identiques à ceux qui, en son absence, auraient traversé l'espace qu'il occupe (69). Donc la question actuelle revient à calculer n et q pour la portion de fluide éonien comprise dans le cône tangent à l'atome o et ayant son sommet en c.

Premier cas. — *L'élément plan est fixe.*

Soit θ l'angle du cône tangent, dont l'axe co fait avec la normale cn un angle γ, et soient aa', bb' deux diamètres rectangulaires d'une section droite de ce cône. Joignons le point c aux quatre extrémités a, a', b, b' et appelons α, α', β, β' les

Fig. 21.



angles que les quatre droites ainsi formées font avec la normale cn. Enfin nommons A et B les dièdres $ncoa$, $ncob$. Nous aurons entre ces diverses quantités les relations suivantes :

$$\cos\alpha = \cos\gamma\cos\theta + \sin\gamma\sin\theta\cos A,$$
$$\cos\alpha' = \cos\gamma\cos\theta - \sin\gamma\sin\theta\cos A;$$

d'où

$$\cos\alpha + \cos\alpha' = 2\cos\gamma\cos\theta.$$

Semblablement

$$\cos\beta + \cos\beta' = 2\cos\gamma\cos\theta$$

et, par suite,

$$\cos\alpha + \cos\alpha' + \cos\beta + \cos\beta' = 4\cos\gamma\cos\theta.$$

Nous trouverons aussi les égalités

$$\cos^2\alpha + \cos^2\alpha' = 2\cos^2\gamma\cos^2\theta + 2\sin^2\gamma\sin^2\theta\cos^2 A,$$
$$\cos^2\beta + \cos^2\beta' = 2\cos^2\gamma\cos^2\theta + 2\sin^2\gamma\sin^2\theta\cos^2 B,$$

et comme

$$\cos^2 A + \cos^2 B = 1,$$

on en déduit

$$\cos^2\alpha + \cos^2\alpha' + \cos^2\beta + \cos^2\beta' = 4\cos^2\gamma\cos^2\theta + 2\sin^2\gamma\sin^2\theta.$$

Or les quatre cylindres, dont la base commune est s et dont les génératrices sont parallèles aux droites ca, ca', cb, cb' et égales en longueur à $v\Delta t$, renferment un nombre d'atomes dirigés vers s, représenté par l'expression

$$Ns\Delta t.v(\cos\alpha + \cos\alpha' + \cos\beta + \cos\beta')\frac{\varepsilon}{4\pi},$$

et la quantité de mouvement de ces quatre groupes d'atomes estimée suivant la normale cn est

$$\delta s\Delta t.v^2(\cos^2\alpha + \cos^2\alpha' + \cos^2\beta + \cos^2\beta')\frac{\varepsilon}{4\pi}.$$

Si donc nous remplaçons les sommes entre parenthèses par leur valeur en fonction de θ, si nous multiplions ensuite par $\frac{2\pi\sin\theta\,d\theta}{4\varepsilon}$ et si nous intégrons de o à θ, nous trouverons, pour les valeurs cherchées de n et de q,

$$n = \frac{Ns\Delta t}{4}v\cos\gamma\sin^2\theta,$$
$$q = \frac{\delta s\Delta t}{4}v^2\left[(2\cos^2\gamma - \sin^2\gamma)\left(\frac{1-\cos^3\theta}{3}\right) + \sin^2\gamma(1-\cos\theta)\right].$$

Les sinus et cosinus de l'angle du cône tangent à l'atome d'éther peuvent s'exprimer en fonction du rayon r de cet

atome et de la distance $oc = c$, car on a

$$\sin\theta = \frac{r}{c},$$

$$1 - \cos^m\theta = 1 - (1 - \sin^2\theta)^{\frac{m}{2}} = \frac{m}{2}\sin^2\theta - \frac{m(m-2)}{8}\sin^4\theta\ldots$$

$$= \frac{m}{2}\frac{r^2}{c^2} - \frac{m(m-2)}{8}\frac{r^4}{c^4}\ldots.$$

Lorsque le rapport $\frac{r}{c}$ est assez petit pour qu'on puisse négliger $\frac{r^4}{c^4}$,

$$\frac{1 - \cos^m\theta}{m} = \frac{1}{2}\frac{r^2}{c^2},$$

et les formules ci-dessus deviennent

$$n = \frac{\text{N}s\,\Delta t}{4}\, v\cos\gamma\,\frac{r^2}{c^2},$$

$$q = \frac{\delta s\,\Delta t}{4}\, v^2\cos^2\gamma\,\frac{r^2}{c^2}.$$

Nous emploierons cette simplification dans l'étude des rapports de deux atomes d'éther, c'est-à-dire que nous supposerons leur rayon petit par rapport à la distance qui les sépare.

DEUXIÈME CAS. — *L'élément plan est mobile.*

76. Supposons d'abord que l'élément plan s situé en c (*fig.* 22) se meut le long de co avec la vitesse V et calculons le nombre d'atomes éoniens qu'il reçoit par réflexion de l'élément σ situé en a, pendant qu'il se transporte de c en c'. Le contour de l'élément σ est déterminé par l'intersection de la surface de l'atome o et du cylindre ayant pour base s et pour arêtes latérales des parallèles à ca.

Soient τ le temps que l'éon emploie à franchir la distance ac avec la vitesse v et x le temps que σ met à réfléchir les atomes qui frappent s dans le parcours $cc' = \text{V}\,\Delta t$. On aura l'équation

$$\tau + \Delta t = x + \tau\,\frac{ac'}{ac},$$

d'où

$$x = \Delta t + \tau\,\frac{ac - ac'}{ac} = \Delta t + \frac{1}{v}\,cc'\cos\theta = \Delta t\left(1 + \frac{V\cos\theta}{v}\right).$$

Or, en posant $caf = \varphi$, on a, pour le nombre d'atomes renvoyés par σ vers s dans le temps x (73)

$$N\sigma\cos\varphi\, v x\,\frac{\varepsilon}{4\pi}.$$

D'autre part, si α désigne l'angle de ca avec la normale cn,

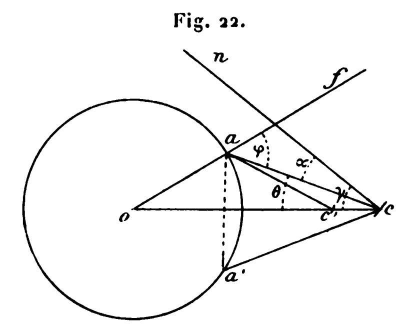
$$\sigma\cos\varphi = s\cos\alpha,$$

et le nombre des atomes qui choquent s sous l'incidence α dans le parcours cc' peut s'écrire

$$\frac{N\varepsilon}{4\pi}\,s\cos\alpha\, v\,\Delta t\left(1 + \frac{V\cos\theta}{v}\right) = \frac{Ns\varepsilon}{4\pi}\,\Delta t(v + V\cos\theta)\cos\alpha.$$

On trouverait de même pour le nombre d'atomes qui viennent

Fig. 22.



choquer s dans la direction $a'c$ symétrique de ac par rapport à l'axe co,

$$\frac{Ns\varepsilon}{4\pi}\,\Delta t(v + V\cos\theta)\cos\alpha',$$

et, comme $\cos\alpha + \cos\alpha' = 2\cos\gamma\cos\theta$ (75), on a pour le nombre total des atomes éoniens réfléchis par l'atome d'éther qui rencontrent s dans le parcours cc',

$$n = \int_0^{\theta_1} \frac{Ns\varepsilon}{4\pi}\,\Delta t(v + V\cos\theta).2\cos\gamma\cos\theta\,\frac{\pi\sin\theta\, d\theta}{\varepsilon},$$

la limite θ_1 répondant à l'angle du cône tangent à la sphère *o*. L'intégration donne

$$n = \frac{\mathrm{N}s\,\Delta t}{4}\left(\cos\gamma\, v \sin^2\theta_1 + 2\mathrm{V}\,\frac{1-\cos^3\theta_1}{3}\right)$$
$$= \frac{\mathrm{N}s\,\Delta t}{4}\cos\gamma(v+\mathrm{V})\,\frac{r^2}{c^2}.$$

La quantité de mouvement correspondant aux atomes réfléchis vers *s* dans quatre directions analogues à celles que nous avons envisagées plus haut (n° 75) sera

$$\frac{\delta s\varepsilon}{4\pi}\Delta t\, v(v+\mathrm{V}\cos\theta)\,(4\cos^2\gamma\cos^2\theta + 2\sin^2\gamma\sin^2\theta).$$

En multipliant cette expression par $\frac{2\pi\sin\theta\, d\theta}{4\varepsilon}$, intégrant de o à θ_1, et négligeant $\frac{r^4}{c^4}$, $\cdots$, on trouvera

$$q = \frac{\delta s\,\Delta t}{4}\, v(v+\mathrm{V})\cos^2\gamma\,\frac{r^2}{c^2};$$

si l'élément *s* s'éloignait de l'atome au lieu de s'en approcher, on devrait changer V en $-\mathrm{V}$ dans les deux formules.

77. Examinons en second lieu l'hypothèse où l'élément *s* se mouvrait dans une direction perpendiculaire à *co*, et, pour éviter les calculs, changeons de méthode.

Concevons une sphère idéale décrite du point *o* comme centre, avec *oc* pour rayon. Les courants éoniens, réfléchis par l'atome d'éther, la traverseront évidemment en même nombre, qu'elle soit immobile ou qu'elle tourne sur son centre. Donc chaque élément de cette sphère reçoit le même nombre d'atomes éoniens, qu'il soit en repos ou qu'il se meuve perpendiculairement au rayon qui le joint au centre, et la quantité de mouvement est aussi la même dans les deux cas.

Ce raisonnement, qui s'applique sans difficulté à tout élément *s* normal à *co*, convient aussi à un élément incliné sur *co* d'un angle γ; car celui-ci reçoit sensiblement le même nombre de courants réfléchis que sa projection $s\cos\gamma$ sur la sphère idéale. Donc les rapports de l'atome d'éther et de l'élément

plan sont les mêmes, que celui-ci se meuve perpendiculairement à *co* ou qu'il soit immobile.

Enfin supposons que l'élément *s* se meuve dans une direction quelconque formant avec *co* un angle β, et décomposons son mouvement en deux autres qui s'effectuent l'un suivant *co*, avec la vitesse $V\cos\beta$, et l'autre normalement à *co*, avec la vitesse $V\sin\beta$. D'après ce qui précède, ce dernier n'a aucune influence sur les rapports de l'atome d'éther et de l'élément plan. Donc ces rapports sont les mêmes que si *s* se mouvait le long de *co* avec la vitesse $V\cos\beta$. Par conséquent,

$$n = \frac{Ns\,\Delta t}{4}(v + V\cos\beta)\cos\gamma\frac{r^2}{c^2}$$

et

$$q = \frac{\delta s\,\Delta t}{4}(v + V\cos\beta)\,v\cos^2\gamma\frac{r^2}{c^2}.$$

β peut varier de 0° à 180° et $\cos\beta$ donnera son signe au terme $V\cos\beta$.

ARTICLE VI.

Rapport d'un atome d'éther mobile avec un élément plan fixe.

78. L'atome d'éther *o* (*fig.* 23) se meut dans la direction *ox* avec la vitesse V et l'élément plan *s* est situé en *c* dans une position quelconque.

Menons la droite *oc* et la normale *cn*, et appelons β, γ les angles *cox* et *ocn*. Figurons aussi le cône tangent *rct* et proposons-nous de calculer le nombre *n* d'atomes éoniens que la calotte *rat* réfléchit vers l'élément *s* dans un temps *x* assez court pour que l'angle du cône tangent soit réputé invariable pendant sa durée, malgré le déplacement de l'atome *o*.

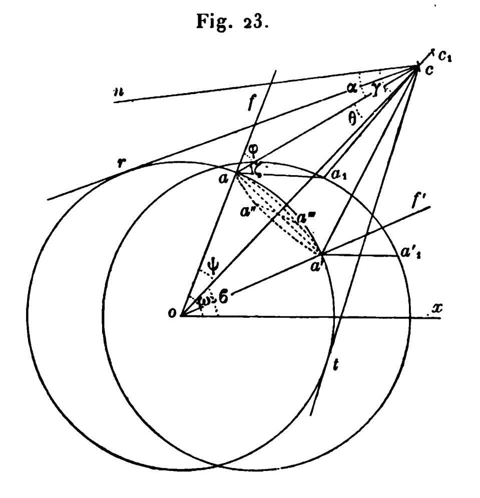
Pour atteindre ce but, considérons un cylindre qui ait *s* pour base et qui découpe sur la calotte sphérique un élément σ situé en *a*. Traçons la droite *oaf* qui fait avec *ox* l'angle ω et la droite *ca* qui fait avec *co*, *cn* et *af* les angles θ, α et φ. La section droite du petit cylindre peut être représentée équivalemment par $\sigma\cos\varphi$ ou $s\cos\alpha$. En conséquence, $\sigma = s\dfrac{\cos\alpha}{\cos\varphi}$, et le nombre d'atomes éoniens réfléchis par σ dans le temps *x* sous

l'angle φ et parallèlement à ac égale (73)

$$\frac{N\varepsilon}{4\pi} s \cos\alpha x \left(v + V\cos\omega \frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}\right);$$

mais l'élément s reçoit le choc de ces atomes dans un temps Δt

Fig. 23.



différent de x, et si nous menons $aa_1 = Vx$ et que nous désignions l'angle caa_1 par ζ, nous trouverons, comme au n° 76,

$$x = \Delta t\left(1 + \frac{V}{u}\cos\zeta\right),$$

formule dans laquelle $u = v + 2V\cos\omega\cos\varphi$ (73). On peut d'ailleurs remplacer $\frac{V}{u}$ par $\frac{V}{v}$ en négligeant $\frac{V^2}{v^2}\cdot$

Donc le nombre des atomes que s reçoit de σ dans le temps Δt est

$$\frac{Ns\varepsilon}{4\pi}\Delta t . v\left[\cos\alpha + \frac{V}{v}\left(\cos\alpha\cos\zeta + \cos\omega\cos\alpha\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}\right) + \frac{V^2}{v^2}(\ldots)\right].$$

Si nous envisageons tous les cylindres qui ont s pour base et dont l'arête latérale fait avec co l'angle θ, nous reconnaîtrons qu'ils découpent sur la sphère o une bande annulaire qui

n'est pas une zone, mais dont certains éléments convenablement choisis ont entre eux des rapports constants. Réunissons-les, par exemple, en groupes formés de quatre éléments distants l'un de l'autre de 90°, et soit a, a', a'', a''' un de ces groupes. Nommons α', α'', α'''; ζ', ζ'', ζ'''; ω', ω'', ω''' les angles analogues à α, ζ, ω. Nous aurons, pour la somme des atomes réfléchis par le groupe,

$$\frac{Ns\varepsilon}{4\pi}\Delta t\left\{\begin{array}{l} v(\cos\alpha+\cos\alpha'+\cos\alpha''+\cos\alpha''') \\ \quad +V\dfrac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}(\cos\omega\cos\alpha+\cos\omega'\cos\alpha'+\cos\omega''+\ldots) \\ \quad +V(\cos\alpha\cos\zeta+\cos\alpha'\cos\zeta'+\cos\alpha''\cos''\zeta+\ldots) \end{array}\right\},$$

et si nous appelons A et B les dièdres *acon*, *acox*; A'' et B'' les dièdres *a''con*, *a''cox* et C le dièdre *ncox*, nous trouverons

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \cos\gamma\cos\theta+\sin\gamma\sin\theta\cos A, \\ \cos\alpha' &= \cos\gamma\cos\theta-\sin\gamma\sin\theta\cos A, \\ \cos\alpha'' &= \cos\gamma\cos\theta+\sin\gamma\sin\theta\cos A'', \\ \cos\alpha''' &= \cos\gamma\cos\theta-\sin\gamma\sin\theta\cos A'', \end{aligned}$$

d'où

$$\cos\alpha+\cos\alpha'+\cos\alpha''+\cos\alpha'''=4\cos\gamma\cos\theta.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \cos\omega &= \cos\beta\cos\psi+\sin\beta\sin\psi\cos B, \\ \cos\omega' &= \cos\beta\cos\psi-\sin\beta\sin\psi\cos B; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} &\cos\omega\cos\alpha+\cos\omega'\cos\alpha' \\ &\quad=(\cos\omega+\cos\omega')\cos\gamma\cos\theta+(\cos\omega-\cos\omega')\sin\gamma\sin\theta\cos A \\ &\quad=2\cos\beta\cos\psi\cos\gamma\cos\theta+2\sin\beta\sin\psi\sin\gamma\sin\theta\cos A\cos B. \end{aligned}$$

On trouverait une valeur de même forme pour

$$\cos\omega''\cos\alpha''+\cos\omega'''\cos\alpha''';$$

par suite,

$$\begin{aligned} &\cos\omega\cos\alpha+\cos\omega'\cos\alpha'+\cos\omega''\cos\alpha''+\cos\omega'''\cos\alpha''' \\ &\quad=4\cos\beta\cos\psi\cos\gamma\cos\theta \\ &\qquad+2\sin\beta\sin\psi\sin\gamma\sin\theta(\cos A\cos B+\cos A''\cos B''), \end{aligned}$$

et, comme

$$\cos A \cos B + \cos A'' \cos B'' = \cos(A + B) = \cos C,$$

on a finalement

$$\begin{aligned} &\cos\omega \cos\alpha + \cos\omega' \cos\alpha' + \ldots \\ &\quad = 4 \cos\beta \cos\psi \cos\gamma \cos\theta + 2 \sin\beta \sin\psi \sin\gamma \sin\theta \cos C. \end{aligned}$$

Pour calculer $\cos\alpha \cos\zeta + \cos\alpha' \cos\zeta' + \ldots$, appelons D, D', D'', D''' les dièdres $cafa_1$, $ca'f'a'_1$, ... qui sont égaux à $coax$, $coa'x$, ..., et nous aurons

$$\begin{aligned} \cos\zeta &= \cos\omega \cos\varphi + \sin\omega \sin\varphi \cos D, \\ \cos\zeta' &= \cos\omega' \cos\varphi + \sin\omega' \sin\varphi \cos D'; \end{aligned}$$

mais

$$\sin\omega \cos D = \frac{\cos\beta - \cos\omega \cos\psi}{\sin\psi}$$

et

$$\sin\omega' \cos D' = \frac{\cos\beta - \cos\omega' \cos\psi}{\sin\psi}.$$

En portant ces valeurs dans $\cos\zeta$, $\cos\zeta'$, multipliant par $\cos\alpha$, $\cos\alpha'$, et remarquant que $\sin(\psi - \varphi) = -\sin\theta$, on trouve

$$\begin{aligned} \cos\alpha \cos\zeta &= -\frac{\sin\theta}{\sin\psi} \cos\omega \cos\alpha + \frac{\sin\varphi}{\sin\psi} \cos\beta \cos\alpha, \\ \cos\alpha' \cos\zeta' &= -\frac{\sin\theta}{\sin\psi} \cos\omega' \cos\alpha' + \frac{\sin\varphi}{\sin\psi} \cos\beta \cos\alpha', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

par suite,

$$\begin{aligned} &\cos\alpha \cos\zeta + \cos\alpha' \cos\zeta' + \ldots \\ &\quad = -\frac{\sin\theta}{\sin\psi} (\cos\omega \cos\alpha + \cos\omega' \cos\alpha' + \ldots) \\ &\quad\quad + \frac{\sin\varphi \cos\beta}{\sin\psi} (\cos\alpha + \cos\alpha' + \ldots). \end{aligned}$$

En conséquence, le nombre des atomes réfléchis par le

groupe a, a', a'', a''' peut s'écrire

$$\frac{Ns\varepsilon}{4\pi}\Delta t\left[\left(v+V\frac{\sin\varphi\cos\mathfrak{G}}{\sin\psi}\right)(\cos\alpha+\cos\alpha'+\ldots)\right.$$
$$\left.+V\left(\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}-\frac{\sin\theta}{\sin\psi}\right)(\cos\omega\cos\alpha+\cos\omega'\cos\alpha'+\ldots)\right].$$

Si l'on multiplie par $\frac{2\pi\sin\theta\,d\theta}{4\varepsilon}$ et si l'on intègre de 0° à θ_1, angle du cône tangent, on aura, pour le nombre des atomes éoniens que reçoit s dans le temps Δt, de toute la calotte rat,

$$n=\frac{Ns\Delta t}{4}\int_0^{\theta_1}\sin\theta\,d\theta$$
$$\times\left[\left(v+V\frac{\sin\varphi\cos\mathfrak{G}}{\sin\psi}\right)2\cos\gamma\cos\theta+V\left(\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}-\frac{\sin\theta}{\sin\psi}\right)\right.$$
$$\left.\times(2\cos\mathfrak{G}\cos\psi\cos\gamma\cos\theta+\sin\mathfrak{G}\sin\psi\sin\gamma\sin\theta\cos C)\right]$$
$$=\frac{Ns\Delta t}{4}\left[\begin{matrix}v\cos\gamma I_1+V\cos\mathfrak{G}\cos\gamma I_2+2V\cos\mathfrak{G}\cos\gamma I_3\\+V\sin\mathfrak{G}\sin\gamma\cos C(I_4-I_5)\end{matrix}\right],$$

en posant

$$I_1=\int_0^{\theta_1}2\cos\theta\sin\theta\,d\theta,$$
$$I_2=\int_0^{\theta_1}\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}-\frac{\sin\theta}{\sin\psi}\cos\psi\right)2\cos\theta\sin\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\theta_1}2\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta,$$
$$I_3=\int_0^{\theta_1}\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}\cos\psi\cos\theta\sin\theta\,d\theta,$$
$$I_4=\int_0^{\theta_1}\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}\sin\psi\sin^2\theta\,d\theta,$$
$$I_5=\int_0^{\theta_1}\sin^3\theta\,d\theta.$$

Or, si l'on néglige les puissances de $\frac{r}{c}$ supérieures à la

troisième, on trouve immédiatement

$$I_1 = I_2 = \frac{r^2}{c^2} \quad \text{et} \quad I_5 = 0;$$

puis

$$\begin{aligned} I_3 - I_4 &= \int_0^{\theta_1} \frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi} (\cos\psi \cos\theta - \sin\psi \sin\theta) \sin\theta \, d\theta \\ &= \int_0^{\theta_1} \cos 2\varphi \sin\theta \, d\theta \\ &= \int_0^{\theta_1} \sin\theta \, d\theta - \int_0^{\theta_1} 2 \sin^2\varphi \sin\theta \, d\theta \\ &= \int_0^{\theta_1} \sin\theta \, d\theta - 2 \frac{c^2}{r^2} \int_0^{\theta_1} \sin^3\theta \, d\theta = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$I_4 = I_3.$$

Reste donc à calculer I_3. Pour effectuer ce calcul, recourons à un changement de variable indépendante. En posant $ac = y$, le triangle aco nous fournit les relations

$$\cos\theta = \frac{c^2 - r^2 + y^2}{2cy}, \quad \text{d'où} \quad \sin\theta \, d\theta = \frac{c^2 - r^2 - y^2}{2cy^2} dy;$$

$$\cos\psi = \frac{c^2 + r^2 - y^2}{2cr}, \quad \cos\varphi = \frac{c^2 - r^2 - y^2}{2ry},$$

et, par substitution, on trouve

$$I_3 = \frac{1}{8r^2c^3} \int_{y_0}^{y_1} [(c^2 - r^2)^2 - 2c^2y^2 + y^4](c^4 - r^4 + 2r^2y^2 - y^4) \frac{dy}{y^4}.$$

D'ailleurs les valeurs des limites sont

$$y_0 = c - r \quad \text{et} \quad y_1 = c\sqrt{1 - \frac{r^2}{c^2}}.$$

La valeur de l'intégrale est

$$= \frac{1}{8r^2c^3} \left[-\frac{32}{15} c^5 + \frac{8}{3} \frac{r^2}{c^3} - \frac{16}{5} r^5 + \sqrt{1 - \frac{r^2}{c^2}} \left(\frac{32}{15} c^5 - \frac{8}{5} r^2 c^3 - \frac{8}{15} r^4 c \right) \right];$$

groupe a, a', a'', a''' peut s'écrire

$$\frac{\mathrm{N}s\varepsilon}{4\pi}\Delta t\left[\left(v+\mathrm{V}\frac{\sin\varphi\cos 6}{\sin\psi}\right)(\cos\alpha+\cos\alpha'+\ldots)\right.$$
$$\left.+\mathrm{V}\left(\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}-\frac{\sin\theta}{\sin\psi}\right)(\cos\omega\cos\alpha+\cos\omega'\cos\alpha'+\ldots)\right].$$

Si l'on multiplie par $\frac{2\pi\sin\theta\,d\theta}{4\varepsilon}$ et si l'on intègre de $0°$ à θ_1, angle du cône tangent, on aura, pour le nombre des atomes éoniens que reçoit s dans le temps Δt, de toute la calotte rat,

$$n=\frac{\mathrm{N}s\Delta t}{4}\int_0^{\theta_1}\sin\theta\,d\theta$$
$$\times\left[\left(v+\mathrm{V}\frac{\sin\varphi\cos 6}{\sin\psi}\right)2\cos\gamma\cos\theta+\mathrm{V}\left(\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}-\frac{\sin\theta}{\sin\psi}\right)\right.$$
$$\left.\times(2\cos 6\cos\psi\cos\gamma\cos\theta+\sin 6\sin\psi\sin\gamma\sin\theta\cos\mathrm{C})\right]$$
$$=\frac{\mathrm{N}s\Delta t}{4}\left[\begin{array}{c}v\cos\gamma\mathrm{I}_1+\mathrm{V}\cos 6\cos\gamma\mathrm{I}_2+2\mathrm{V}\cos 6\cos\gamma\mathrm{I}_3\\+\mathrm{V}\sin 6\sin\gamma\cos\mathrm{C}(\mathrm{I}_4-\mathrm{I}_5)\end{array}\right],$$

en posant

$$\mathrm{I}_1=\int_0^{\theta_1}2\cos\theta\sin\theta\,d\theta,$$
$$\mathrm{I}_2=\int_0^{\theta_1}\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}-\frac{\sin\theta}{\sin\psi}\cos\psi\right)2\cos\theta\sin\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\theta_1}2\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta,$$
$$\mathrm{I}_3=\int_0^{\theta_1}\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}\cos\psi\cos\theta\sin\theta\,d\theta,$$
$$\mathrm{I}_4=\int_0^{\theta_1}\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}\sin\psi\sin^2\theta\,d\theta,$$
$$\mathrm{I}_5=\int_0^{\theta_1}\sin^3\theta\,d\theta.$$

Or, si l'on néglige les puissances de $\frac{r}{c}$ supérieures à la

troisième, on trouve immédiatement

$$I_1 = I_2 = \frac{r^2}{c^2} \quad \text{et} \quad I_5 = 0;$$

puis

$$\begin{aligned} I_3 - I_4 &= \int_0^{\theta_1} \frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi} (\cos\psi\cos\theta - \sin\psi\sin\theta)\sin\theta\, d\theta \\ &= \int_0^{\theta_1} \cos 2\varphi \sin\theta\, d\theta \\ &= \int_0^{\theta_1} \sin\theta\, d\theta - \int_0^{\theta_1} 2\sin^2\varphi \sin\theta\, d\theta \\ &= \int_0^{\theta_1} \sin\theta\, d\theta - 2\frac{c^2}{r^2}\int_0^{\theta_1} \sin^3\theta\, d\theta = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$I_4 = I_3.$$

Reste donc à calculer I_3. Pour effectuer ce calcul, recourons à un changement de variable indépendante. En posant $ac = y$, le triangle *aco* nous fournit les relations

$$\cos\theta = \frac{c^2 - r^2 + y^2}{2cy}, \quad \text{d'où} \quad \sin\theta\, d\theta = \frac{c^2 - r^2 - y^2}{2cy^2} dy;$$

$$\cos\psi = \frac{c^2 + r^2 - y^2}{2cr}, \quad \cos\varphi = \frac{c^2 - r^2 - y^2}{2ry},$$

et, par substitution, on trouve

$$I_3 = \frac{1}{8r^2c^3}\int_{y_0}^{y_1} [(c^2 - r^2)^2 - 2c^2y^2 + y^4](c^4 - r^4 + 2r^2y^2 - y^4)\frac{dy}{y^4}.$$

D'ailleurs les valeurs des limites sont

$$y_0 = c - r \quad \text{et} \quad y_1 = c\sqrt{1 - \frac{r^2}{c^2}}.$$

La valeur de l'intégrale est

$$= \frac{1}{8r^2c^3}\left[-\frac{32}{15}c^5 + \frac{8}{3}\frac{r^2}{c^3} - \frac{16}{5}r^5 + \sqrt{1 - \frac{r^2}{c^2}}\left(\frac{32}{15}c^5 - \frac{8}{5}r^2c^3 - \frac{8}{15}r^4c\right)\right];$$

mais, si l'on remplace $\sqrt{1-\frac{r^2}{c^2}}$ par son développement en série, et si l'on néglige $\frac{r^4}{c^4}, \frac{r^5}{c^5}, \dots$, on a simplement

$$I_3 = -\frac{2}{5}\frac{r^3}{c^3}.$$

Réunissons enfin toutes les intégrales partielles et nous aurons

$$n = \frac{Ns\Delta t}{4}\left\{\cos\gamma\left[(v+V\cos\beta)\frac{r^2}{c^2} - \frac{4}{5}V\cos\beta\frac{r^3}{c^3}\right] - \frac{2}{5}V\sin\beta\sin\gamma\cos C\frac{r^3}{c^3}\right\}$$

En négligeant $\frac{r^3}{c^3}$, cette formule se réduit à

$$n = \frac{Ns\Delta t}{4}(v+V\cos\beta)\cos\gamma\frac{r^2}{c^2}.$$

79. Passons au calcul de la force normale qui agit sur s. Nous avons trouvé plus haut, pour le nombre d'atomes éoniens que s reçoit de l'élément σ dans le temps Δt,

$$\frac{Ns\varepsilon\Delta t}{4\pi}\left(v\cos\alpha + V\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}\cos\omega\cos\alpha\right)\left(1+\frac{V\cos\zeta}{u}\right);$$

leur quantité de mouvement estimée suivant la normale s'obtient en multipliant leur nombre par $\mu u\cos\alpha$, ce qui donne

$$\frac{\delta s\varepsilon\Delta t}{4\pi}\left(v\cos^2\alpha + V\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}\cos\omega\cos^2\alpha\right)(u+V\cos\zeta).$$

Remplaçons u par sa valeur $v+2V\cos\omega\cos\varphi$, effectuons les produits et supprimons les termes qui contiennent V^2, puisque nous sommes convenus de considérer le rapport $\frac{V^2}{v^2}$ comme excessivement petit. Il nous restera

$$\frac{\delta s\varepsilon\Delta t}{4\pi}v\left[(v+V\cos\zeta)\cos^2\alpha + V\frac{4\cos^2\varphi - 1}{\cos\varphi}\cos\omega\cos^2\alpha\right].$$

Puis, en réunissant les actions exercées par le groupe des

quatre éléments situés en a, a', a'', a''', nous aurons

$$\frac{\delta s\,\varepsilon\,\Delta t}{4\pi}v\begin{bmatrix} v(\cos^2\alpha+\cos^2\alpha'+\ldots) \\ +V(\cos^2\alpha\cos\zeta+\cos^2\alpha'\cos\zeta'+\ldots) \\ +V\dfrac{4\cos^2\varphi-1}{\cos\varphi}(\cos\omega\cos^2\alpha+\cos\omega'\cos^2\alpha'+\ldots)\end{bmatrix};$$

or

$$\cos^2\alpha+\cos^2\alpha'+\cos^2\alpha''+\cos^2\alpha'''=4\cos^2\gamma\cos^2\theta+2\sin^2\gamma\sin^2\theta,$$

$$\begin{aligned}&\cos\omega\cos^2\alpha+\cos\omega'\cos^2\alpha'+\ldots\\ &\quad=2\cos6\cos\psi(2\cos^2\gamma\cos^2\theta+\sin^2\gamma\sin^2\theta)\\ &\quad\quad+4\sin6\sin\psi\cos\gamma\cos\theta\sin\gamma\sin\theta\cos C\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\cos^2\alpha\cos\zeta+\cos^2\alpha'\cos\zeta'+\ldots\\ &\quad=\cos6\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}(\cos^2\alpha+\cos^2\alpha'+\ldots)\\ &\quad\quad-\frac{\sin\theta}{\sin\psi}(\cos\omega\cos^2\alpha+\cos\omega'\cos^2\alpha'+\ldots).\end{aligned}$$

On peut donc exprimer la force normale élémentaire en fonction des seules variables θ, φ, ψ, liées entre elles par les relations $\varphi=\psi+\theta$ et $\frac{\sin\theta}{\sin\varphi}=\frac{r}{c}\cdot$ Multipliant ensuite par $\frac{2\pi\sin\theta\,d\theta}{4\varepsilon}$ et intégrant de o à θ_1, on aura pour la quantité totale de mouvement

$$q=\frac{\delta s\,\Delta t}{4}v\begin{bmatrix} vI_1+V\cos6\,I_2+V\cos6(2\cos^2\gamma-\sin^2\gamma)I_3 \\ +V\cos6\sin^2\gamma I_4+V\sin6\sin2\gamma\cos C(I_5-I_6)\end{bmatrix},$$

formule dans laquelle

$$I_1=\int_0^{\theta_1}(2\cos^2\gamma\cos^2\theta+\sin^2\gamma\sin^2\theta)\sin\theta\,d\theta,$$

$$\begin{aligned}I_2&=\int_0^{\theta_1}(2\cos^2\gamma\cos^2\theta+\sin^2\gamma\sin^2\theta)\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}-\cos\psi\frac{\sin\theta}{\sin\psi}\right)\sin\theta\,d\theta\\ &=\int_6^{\theta_1}(2\cos^2\gamma\cos^2\theta+\sin^2\gamma\sin^2\theta)\cos\theta\sin\theta\,d\theta,\end{aligned}$$

$$I_3 = \int_0^{\theta_1} \frac{4\cos^2\varphi - 1}{\cos\varphi} \cos\psi \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta,$$

$$I_4 = \int_0^{\theta_1} \frac{4\cos^2\varphi - 1}{\cos\varphi} \cos\psi \sin\theta \, d\theta,$$

$$I_5 = \int_0^{\theta_1} \frac{4\cos^2\varphi - 1}{\cos\varphi} \sin\psi \cos\theta \sin^2\theta \, d\theta,$$

$$I_6 = \int_0^{\theta_1} \sin^3\theta \cos\theta \, d\theta.$$

En négligeant, comme ci-dessus, les puissances de $\frac{r}{c}$ supérieures à la troisième, on trouve immédiatement

$$I_1 = I_2 = \cos^2\gamma \frac{r^2}{c^2} \quad \text{et} \quad I_6 = 0,$$

puis

$$I_3 - I_5 = \int_0^{\theta_1} \frac{4\cos^2\varphi - 1}{\cos\varphi} (\cos\psi\cos\theta - \sin\psi\sin\theta) \cos\theta \sin\theta \, d\theta$$

$$= \int_0^{\theta_1} (4\cos^2\varphi - 1) \cos\theta \sin\theta \, d\theta,$$

$$= \int_0^{\theta_1} \left(3 - 4\frac{c^2}{r^2}\sin^2\theta\right) \cos\theta \sin\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\frac{r^2}{c^2},$$

d'où

$$I_5 = I_3 - \frac{1}{2}\frac{r^2}{c^2}.$$

Pour calculer I_3 et I_4, nous avons recours au même changement de variable indépendante que dans le numéro précédent, et nous trouverons ainsi

$$I_3 = \frac{1}{8r^2c^4} \int_{y_0}^{y_1} [(c^2 - r^2 - y^2)^2 - r^2y^2](c^2 + r^2 - y^2)(c^2 - r^2 + y^2)^2 \frac{dy}{y^5}$$

$$= \frac{1}{8r^2c^4} \Big[2rc^5 - \tfrac{1}{3}r^3c^3 + 4r^4c^2 - r^5c - \tfrac{2}{3}r^5 - \log\sqrt{\frac{c+r}{c-r}}\,(2c^6 - r^2c^4 - r$$

et

$$I_4 = \frac{1}{2r^2c^2}\int_{y_0}^{y_1}(c^2+r^2-y^2)[(c^2-r^2-y^2)^2-r^2y^2]\frac{dy}{y^3}$$

$$= \frac{1}{2r^2c^2}\left[3rc^3+r^4-\log\sqrt{\frac{c+r}{c-r}}(3c^4-r^2c^2)\right];$$

or

$$\log\sqrt{\frac{c+r}{c-r}} = \frac{r}{c}+\frac{1}{3}\frac{r^3}{c^3}+\frac{1}{5}\frac{r^5}{c^5}+\ldots,$$

et, si l'on remplace ce logarithme par son développement dans les valeurs de I_3 et I_4, on trouve, toutes les réductions faites,

$$I_3 = I_4 = \frac{1}{2}\frac{r^2}{c^2}-\frac{2}{15}\frac{r^3}{c^3} \quad \text{et, par suite,} \quad I_5 = -\frac{2}{15}\frac{r^3}{c^3}.$$

Réunissons encore toutes les intégrales partielles, et nous aurons

$$q = \frac{\delta s\,\Delta t}{4}v\left\{\cos^2\gamma\left[(v+2V\cos\theta)\frac{r^2}{c^2}-\tfrac{4}{15}V\cos\theta\frac{r^3}{c^3}\right]\right.$$
$$\left.-\tfrac{2}{15}V\sin\theta\sin2\gamma\cos C\frac{r^3}{c^3}\right\}.$$

En négligeant $\frac{r^3}{c^3}$, cette formule se réduit à

$$q = \frac{\delta s\,\Delta t}{4}v(v+2V\cos\theta)\cos^2\gamma\frac{r^2}{c^2}.$$

On peut observer que le dièdre C disparaît des formules simplifiées. Donc l'orientation de l'élément *s* autour de *co* n'exerce qu'une influence très secondaire sur les résultats.

ARTICLE VII.

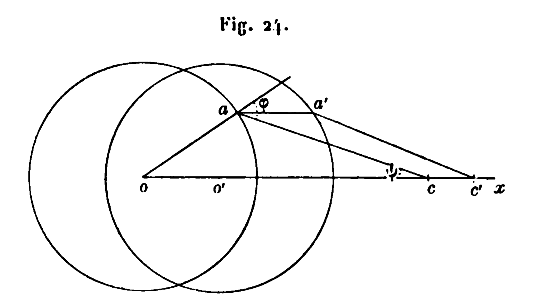
Rapport d'un atome d'éther mobile et d'un élément plan mobile.

80. Premier cas. — *L'atome et l'élément se meuvent le long de la même droite.*

Soient l'atome *o* (*fig.* 24) et l'élément *s* situé en *c* qui se meu-

vent tous deux dans la direction ox avec les vitesses V et W. Supposons, en outre, le plan de s normal à ox.

Fig. 24.



Un élément σ de o, situé en a, réfléchit, dans la direction ac qui ne varie pas sensiblement, et dans le temps x, un nombre d'atomes éoniens égal à (n° 73)

$$\frac{Ns\varepsilon}{4\pi}x\cos\psi\left(v+V\cos\omega\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}\right),$$

en remplaçant $\sigma\cos\varphi$ par son égal $s\cos\psi$.

Pour savoir combien s en reçoit depuis l'instant où les premiers émanés du point a lui arrivent en c jusqu'au moment où l'atteignent en c' ceux qui sont partis du point a', posons $aa'=Vx$, $cc'=W\Delta t$, et désignons par τ le temps que l'éon met à parcourir ac avec la vitesse $u=v+2V\cos\omega\cos\varphi$. On a la relation

$$\tau+\Delta t=x+\tau\frac{a'c'}{ac},$$

d'où

$$x=\Delta t+\frac{\tau}{ac}(ac-a'c'),$$

et, comme $ac-a'c'=(Vx-W\Delta t)\cos\psi$ approximativement,

$$x=\Delta t\times\frac{u-W\cos\psi}{u-V\cos\psi}=\Delta t\left[1+\frac{(V-W)\cos\psi}{u}+\ldots\right].$$

En conséquence, le nombre d'atomes éoniens que s reçoit

de σ dans le temps Δt est

$$\frac{N s \varepsilon \Delta t}{4\pi} \cos\psi \left[v + (V - W)\cos\psi + V \cos\omega \frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi} + \ldots \right],$$

et le nombre de ceux qu'il reçoit de tout l'atome est

$$n = \frac{N s \Delta t}{4} \int_0^{\psi_1} \left[v + (V - W)\cos\psi + V \cos\omega \frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi} \right] 2 \cos\psi \sin\psi \, d\psi$$

ou

$$n = \frac{N s \Delta t}{4} \left[(v + V - W) \frac{r^2}{c^2} - \frac{4}{5} V \frac{r^3}{c^3} \right].$$

Leur vitesse est

$$u = v + 2 V \cos\omega \cos\varphi$$

et la quantité de mouvement du faisceau réfléchi suivant ac, projetée sur oc, est

$$\frac{\delta s \varepsilon}{4\pi} \Delta t . v \cos^2\psi \left[v + (V - W)\cos\psi + V \cos\omega \frac{4\cos^2\varphi - 1}{\cos\varphi} \right],$$

et, pour tous les courants que l'atome O réfléchit vers s dans le parcours oo', on a

$$= \frac{\delta s \Delta t}{4} v \int_0^{\psi_1} \left[v + (V - W)\cos\psi + V \cos\omega \frac{4\cos^2\varphi - 1}{\cos\varphi} \right] 2 \cos^2\psi \sin\psi \, d\psi$$

$$= \frac{\delta s \Delta t}{4} v \left[(v + 2V - W) \frac{r^2}{c^2} - \frac{4}{15} V \frac{r^3}{c^3} \right].$$

Si la normale à l'élément plan s était inclinée d'un angle γ sur oc, les formules deviendraient

$$n = \frac{N s \Delta t}{4} \cos\gamma \left[(v + V - W) \frac{r^2}{c^2} - \frac{4}{5} V \frac{r^3}{c^3} \right],$$

$$q = \frac{\delta s \Delta t}{4} v \cos^2\gamma \left[(v + 2V - W) \frac{r^2}{c^2} - \frac{4}{15} V \frac{r^3}{c^3} \right].$$

81. **Deuxième cas.** — *L'atome d'éther et l'élément plan se meuvent dans des directions différentes.*

Admettons d'abord que l'élément s se meut, suivant oc (*fig.* 23), de c en c_1 dans le temps Δt, avec la vitesse W, et

que l'élément σ de l'atome d'éther se meut de a en a_1, avec la vitesse V, dans un temps x précisé comme dans le premier cas.

Pour déterminer x, nous aurons encore l'équation

$$x = \Delta t + \frac{\tau}{ac}(ac - a_1 c_1);$$

mais la différence $ac - a_1 c_1$ est sensiblement égale à

$$V x \cos\zeta - W \Delta t \cos\theta$$

et, par suite,

$$x = \Delta t\left(\frac{u - W\cos\theta}{u - V\cos\zeta}\right) = \Delta t\left(1 + \frac{V\cos\zeta - W\cos\theta}{v} + \ldots\right).$$

Si nous comparons cette valeur de x avec celle que nous avons trouvée à l'article VI,

$$x = \Delta t\left(1 + \frac{V\cos\zeta}{v}\right),$$

nous voyons qu'elles diffèrent simplement par le terme $\frac{-W\cos\theta}{v}$, et il est facile de reconnaître que l'introduction de ce terme dans les calculs de l'article visé ne modifiera les résultats que par la présence d'un terme correspondant. Les formules seront donc

$$n = \frac{Ns\Delta t}{4}\left\{\cos\gamma\left[(v + V\cos\beta - W)\frac{r^2}{c^2} - \frac{4}{5}V\cos\beta\frac{r^3}{c^3}\right] - \frac{2}{5}V\sin\beta\sin\gamma\cos C\frac{r^3}{c^3}\right\},$$

$$q = \frac{\delta s\Delta t}{4}v\left\{\cos^2\gamma\left[(v + 2V\cos\beta - W)\frac{r^2}{c^2} - \frac{4}{15}V\cos\beta\frac{r^3}{c^3}\right] - \frac{2}{15}V\sin\beta\sin 2\gamma\cos C\frac{r^3}{c^3}\right\}.$$

Si l'élément s se rapprochait de l'atome, au lieu de s'en éloigner, il faudrait remplacer $-W$ par $+W$.

Si l'élément plan se mouvait perpendiculairement à oc, on pourrait reproduire ici le raisonnement du n° 77, en le modifiant légèrement, et l'on reconnaîtrait ainsi que les valeurs

de n et q ne diffèrent pas sensiblement de celles qui se rapportent au cas où l'élément s est en repos.

Enfin, si cet élément se meut dans une direction inclinée sur oc d'un angle η, on décomposera son mouvement en deux autres, l'un perpendiculaire à oc et l'autre dirigé suivant cette droite, et l'on verra qu'il suffit de tenir compte de ce dernier pour établir les formules. Celles-ci ne différeront évidemment des précédentes que par la substitution de $W\cos\eta$ à W.

Donc les formules les plus générales, contenant à elles seules tous les résultats des articles précédents, sont

$$n = \frac{Ns\,\Delta t}{4}\left\{\cos\gamma\left[(v + V\cos\beta - W\cos\eta)\frac{r^2}{c^2} - \frac{4}{5}V\cos\beta\frac{r^3}{c^3}\right] - \frac{2}{5}V\sin\beta\sin\gamma\cos C\frac{r^3}{c^3}\right\},$$

$$q = \frac{\delta s\,\Delta t}{4}v\left\{\cos^2\gamma\left[(v + 2V\cos\beta - W\cos\eta)\frac{r^2}{c^2} - \frac{4}{15}V\cos\beta\frac{r^3}{c^3}\right] - \frac{2}{15}V\sin\beta\sin 2\gamma\cos C\frac{r^3}{c^3}\right\}.$$

Les angles η et β peuvent varier de 0° à 180° et représentent toujours les angles formés avec une même direction de la droite oc par les vitesses respectives de l'élément et de l'atome.

82. Terminons cet article en comparant l'effet des courants réfléchis par l'atome d'éther vers l'élément s à l'effet qu'eussent produit les courants directs que ce même atome a empêché d'atteindre s.

Les valeurs de n et q, relatives aux courants directs, ont été calculées (n° 77). Nous avons seulement à y changer $V\cos\beta$ en $-W\cos\eta$, pour les mettre en rapport avec les calculs actuels. Elles deviennent ainsi

$$n_1 = \frac{Ns\,\Delta t}{4}(v - W\cos\eta)\cos\gamma\frac{r^2}{c^2},$$

$$q_1 = \frac{\delta s\,\Delta t}{4}v(v - W\cos\eta)\cos^2\gamma\frac{r^2}{c^2};$$

par suite

$$n - n_1 = \frac{\mathrm{N} s\, \Delta t}{4} \mathrm{V} \left[\cos\gamma \cos\beta \left(\frac{r^2}{c^2} - \frac{4}{5} \frac{r^3}{c^3} \right) - \frac{2}{5} \sin\beta \sin\gamma \cos \mathrm{C} \frac{r^3}{c^3} \right],$$

$$q - q_1 = \frac{\delta s\, \Delta t}{4} \rho \mathrm{V} \left[\cos^2\gamma \cos\beta \left(\frac{r^2}{c^2} - \frac{2}{15} \frac{r^3}{c^3} \right) - \frac{1}{15} \sin\beta \sin 2\gamma \cos \mathrm{C} \frac{r^3}{c^3} \right]$$

CHAPITRE V.

ÉLASTICITÉ DE L'ÉTHER.

83. Dans le Chapitre I de ce travail, l'étude de la constitution de la matière nous a fait admettre l'élasticité comme propriété essentielle des atomes. Ici, ce n'est pas de cette propriété qu'il s'agit, mais de l'élasticité du milieu éthéré.

On entend par *milieu* un ensemble quelconque d'éléments que l'on considère comme formant un tout, par exemple l'air et l'eau, et l'on dit qu'un milieu est élastique lorsque le déplacement relatif de l'un de ses éléments provoque dans les éléments circonvoisins une action répulsive du côté où il s'avance et une action attractive du côté opposé.

Il est évident que l'éon ne constitue pas un milieu élastique, puisque les mouvements de ses atomes sont absolument indépendants les uns des autres. L'éther serait également privé d'élasticité, si ses atomes existaient seuls dans une région de l'espace; mais ils sont disséminés au sein de l'éon, qui établit un lien entre eux, et, par l'intermédiaire de ce fluide, les mouvements de chacun peuvent influer sur ceux des autres. Comme nous voulons non seulement reconnaître, d'une manière générale, que l'éther est élastique, mais préciser les lois de son élasticité, nous allons consacrer plusieurs articles à étudier en détail l'action réciproque de deux atomes d'éther.

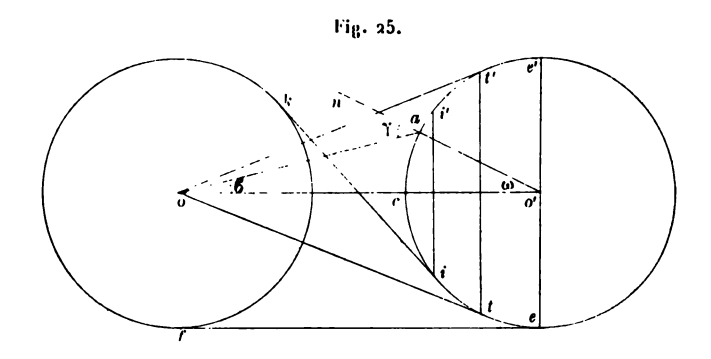
ARTICLE I.

Action d'un atome d'éther en mouvement sur un atome en repos.

84. Supposons d'abord que la ligne des centres des deux atomes soit la direction du mouvement. Ainsi l'atome o s'avance vers l'atome o' dans la direction oo' avec la vitesse V.

Considérons son action sur un élément s de o' situé en a. Menons la droite $o'an$ qui fait avec $o'o$ l'angle ω, et la droite oa qui fait avec oo' et an les angles β et γ. Posons en outre $o'a = r$, $oa = y$ et $oo' = c$.

Fig. 25.



D'après la fin du Chapitre précédent, l'influence du mouvement de o sur la force normale qui agit en a est exprimée par la différence $q - q_1$. Comme dans le cas actuel le dièdre $C = 180^\circ$, l'expression se simplifie et devient, en remplaçant c par y,

$$q - q_1 = \frac{\delta s\,\Delta t}{2} v V \left[\cos^2\gamma \cos\beta \left(\frac{r^2}{y^2} - \frac{2}{15}\frac{r^3}{y^3}\right) + \tfrac{1}{15}\sin\beta \sin 2\gamma \frac{r^3}{y^3}\right];$$

comme on a $\sin\beta < \frac{r}{y}$, on a par suite $\sin\beta \frac{r^3}{y^3} < \frac{r^4}{y^4}$; et le dernier terme de $q - q_1$ peut être négligé.

Toutefois cette formule n'est pas exacte pour toutes les positions du point a; et, afin de préciser les limites des positions auxquelles elle convient, menons dans le plan $oo'a$ les deux tangentes communes ki et fe, l'une intérieure, l'autre extérieure; puis faisons-les tourner autour de la ligne des centres. Les points de contact i et e décriront deux circonférences qui délimiteront la calotte ici' et la zone $iei'e'$. Or il est aisé de voir que la formule s'applique aux éléments de la calotte, mais non à ceux de la zone. Néanmoins nous ne nous arrêterons pas à chercher la formule précise qui convient à ces derniers; car, dans l'hypothèse où nous nous pla-

çons, le rapport $\frac{r}{y}$ ou $\frac{r}{c}$ étant très petit, la zone en question a si peu d'étendue que les cercles de contact ii' et ee' se confondent presque et que l'on pourrait, sans erreur sensible, prendre l'un ou l'autre pour limite des éléments plans auxquels correspond la formule. *A fortiori* pourra-t-on prendre pour cette limite le cercle de contact du cône tangent ott', cercle intermédiaire entre les deux précédents. On établira même ainsi une sorte de compensation, négligeant d'une part l'action exercée sur les éléments de la zone $tet'e'$, et renforçant de l'autre l'action exercée sur ceux de la zone $itt'i'$.

Si nous désignons par ω_1 l'angle $oo't'$, la résultante de toutes les impulsions élémentaires, estimée suivant oo', sera

$$\frac{\Delta t}{2} \rho V \int_0^{\omega_1} \left(\cos 6 \cos^2 \gamma \frac{r^2}{y^2} - \frac{2}{15} \cos 6 \cos^2 \gamma \frac{y^3}{r^3} \right) \cos \omega_1 \, \frac{2\pi r^2 \sin \omega \, d\omega}{s}.$$

Toutes les lignes trigonométriques peuvent s'exprimer en fonction de y au moyen des relations

$$\cos 6 = \frac{c^2 - r^2 + y^2}{2cy},$$

$$\cos \gamma = \frac{c^2 - r^2 - y^2}{2ry},$$

$$\cos \omega = \frac{c^2 + r^2 - y^2}{2cr}$$

et

$$\sin \omega \, d\omega = \frac{y\, dy}{cr}.$$

Les limites sont alors $c - r$ et $\sqrt{c^2 - r^2}$.

Le résultat des calculs donne

$$\Sigma(q - q_1) \cos \omega = \pi r^2 \delta \Delta t . \rho V \left(\frac{1}{4} \frac{r^2}{c^2} + \frac{1}{10} \frac{r^3}{c^3} \right).$$

Maintenant, si nous nous reportons aux formules du choc simultané (n° 52), nous reconnaîtrons facilement que, dans le cas actuel, on a

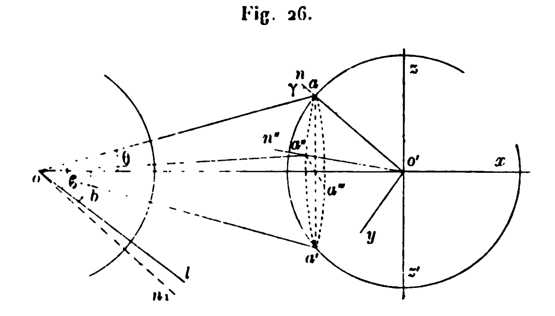
$$\frac{\Delta V'}{\Delta t} = \frac{2 \Sigma m v x}{M + \Sigma m x^2},$$

et, comme nous supposons qu'on peut négliger $\Sigma m x^2$ en face de M, on a simplement

$$M\frac{dV'}{dt} = 2\pi r^2 \delta e V\left(\frac{1}{4}\frac{r^2}{c^2} + \frac{1}{10}\frac{r^3}{c^3}\right).$$

85. Supposons, en second lieu, que la ligne des centres oo' fasse un angle b avec la direction du mouvement ol (*fig.* 26).

Fig. 26.



L'influence du mouvement de o sur l'élément s situé en a se manifestera encore par la quantité de mouvement

$$q - q_1 = \frac{\delta s\, \Delta t}{2} eV\left[\cos 6 \cos^2\gamma\left(\frac{r^2}{y^2} - \frac{2}{15}\frac{r^3}{y^3}\right) - \tfrac{2}{15}\sin 6 \cos\gamma \sin\gamma \cos C \frac{r^3}{y^3}\right]$$

mais $\cos 6$ n'est plus constant pour tous les éléments de la zone $aa'a''$ correspondant au cône d'angle ω. De plus la direction du mouvement que prendra o' est inconnue, et nous sommes obligés de recourir aux trois formules du choc simultané

$$(\Delta V')X' = \frac{2\Sigma mvx}{M + \Sigma mx^2},$$

$$(\Delta V')Y' = \frac{2\Sigma mvy}{M + \Sigma my^2},$$

$$(\Delta V')Z' = \frac{2\Sigma mvz}{M + \Sigma mz^2}.$$

Toutefois, si l'axe $o'z$ est mené dans le plan $oo'l$, l'axe $o'y$ sera perpendiculaire à ce plan, et la composante $(\Delta V')Y'$ sera nulle. Nous aurons donc seulement à déterminer les deux

autres, c'est-à-dire à calculer Σmvx et Σmvz, puisque nous négligeons Σmx^2 et Σmz^2 en face de M. Pour calculer ces deux résultantes, nous laissons de côté les sommes des quantités de mouvement qui existeraient sans l'influence du mouvement de l'atome o, puisque ces sommes sont nulles, et nous tenons compte seulement de la différence $q - q_1$, comme nous l'avons déjà fait plus haut, sans en donner la raison. Donc

$$\Sigma mvx = \Sigma(q - q_1)x \quad \text{et} \quad \Sigma mvz = \Sigma(q - q_1)z.$$

Dans ces formules, $x = \cos\omega$ et ω varie de 0° à l'arc ω_1, pour lequel $\cos\omega_1 = \frac{r}{c}$; z est le cosinus de l'angle $ao'z$.

Considérons le groupe des quatre éléments a, a', a'', a''' situés aux extrémités de deux diamètres rectangulaires et appelons θ, θ', θ'', θ''' et z, z', z'', z''' les valeurs de θ et z qui leur correspondent. Nommons aussi A et A″, B et B″, C et C″ les dièdres $aoo'z$, $a''oo'z$, $aoo'l$, $a''oo'l$, $naol$, $n''a''ol$.

Entre toutes ces quantités, nous aurons les relations suivantes :

$$\cos\theta = \cos b \cos\theta + \sin b \sin\theta \cos B,$$
$$\cos\theta' = \cos b \cos\theta - \sin b \sin\theta \cos B;$$

d'où

$$\cos\theta + \cos\theta' = 2 \cos b \cos\theta$$

et

$$\cos\theta - \cos\theta' = 2 \sin b \sin\theta \cos B;$$

puis

$$z = \sin\omega \cos A, \quad z' = -\sin\omega \cos A,$$
$$z'' = \sin\omega \cos A'', \quad z''' = -\sin\omega \cos A''.$$

Par suite

$$z \cos\theta + z' \cos\theta' = 2 \sin b \sin\theta \sin\omega \cos A \cos B,$$
$$z'' \cos\theta'' + z''' \cos\theta''' = 2 \sin b \sin\theta \sin\omega \cos A'' \cos B'';$$

et, comme

$$\cos A \cos B + \cos A'' \cos B'' = \cos(A + B) = -1,$$

on a

$$z \cos\theta + z' \cos\theta' + \ldots = -2 \sin b \sin\theta \sin\omega.$$

D'autre part, si nous menons on_1 parallèle à $o'n$, de manière que l'angle $aon_1 = \gamma$, nous aurons

$$\cos n_1 o l = \cos 6 \cos\gamma - \sin 6 \sin\gamma \cos C$$

et

$$\cos n_1 o l = \cos b \cos\omega + \sin b \sin\omega \cos A;$$

d'où

$$\cos 6 \cos\gamma - \sin 6 \sin\gamma \cos C = \cos b \cos\omega - \sin b \sin\omega \cos A.$$

De même,

$$\cos 6' \cos\gamma - \sin 6' \sin\gamma \cos C' = \cos b \cos\omega - \sin b \sin\omega \cos A.$$

Par suite,

$$\cos\gamma(\cos 6 + \cos 6') - \sin\gamma(\sin 6 \cos C + \sin 6' \cos C') = 2 \cos b \cos\omega,$$

d'où

$$\sin\gamma(\sin 6 \cos C + \sin 6' \cos C') = 2 \cos b \cos\theta \cos\gamma - 2 \cos b \cos\omega$$

et

$$\begin{aligned}\sin\gamma(\sin 6 \cos C + \sin 6' \cos C') &= 2 \cos b(\cos\theta \cos\gamma - \cos\omega)\\ &= -2 \cos b \sin\gamma \sin\theta.\end{aligned}$$

Cette expression, multipliée par $\frac{r^3}{y^3}$, est négligeable, car on a

$$\sin\theta < \frac{r}{y} \quad \text{et par suite} \quad \sin\theta \frac{r^3}{y^3} < \frac{r^4}{y^4}.$$

Nous pouvons donc nous borner à prendre

$$q - q_1 = \frac{\delta s \, \Delta t}{2} v V \cos 6 \cos^2\gamma \left(\frac{r^2}{y^2} - \frac{2}{15} \frac{r^3}{y^3}\right),$$

et il vient

$$\Sigma(q - q_1) \cos\omega = \delta \Delta t v V . \pi r^2 \int_0^{\omega_1} \cos 6 \cos^2\gamma \left(\frac{r^2}{y^2} - \frac{2}{15} \frac{r^3}{y^3}\right) \cos\omega \sin\omega d$$

et, en réunissant le groupe des quatre éléments a, a', a'', a'',

$$\begin{aligned}\frac{\Sigma}{\Delta t}(q - q_1) \cos\omega &= \pi r^2 \delta v V \int_0^{\omega_1} \cos b \cos\theta \cos^2\gamma \left(\frac{r^2}{y^2} - \frac{2}{15} \frac{r^3}{y^3}\right) \cos\omega \sin\omega (\\ &= \pi r^2 \delta v V \cos b \left(\frac{1}{4} \frac{r^2}{c^2} + \frac{1}{10} \frac{r^3}{c^3}\right)\end{aligned}$$

et enfin

$$M\frac{\Delta V'}{\Delta t}X' = \pi r^2 \delta\rho V \cos b\left(\frac{1}{2}\frac{r^2}{c^2} + \frac{1}{5}\frac{r^3}{c^3}\right);$$

on trouve aussi

$$\Sigma(q - q_1)z = \pi r^2 \delta\rho V \Delta t \int_0^{\omega_1} \cos 6 \cos^2\gamma\left(\frac{r^2}{y^2} - \frac{2}{15}\frac{r^3}{y^3}\right) z \sin\omega\, d\omega$$

et, pour le groupe des quatre éléments,

$$(q - q_1)z = \pi r^2 \delta\rho V \int_0^{\omega_1} \cos^2\gamma\left(\frac{r^2}{y^2} - \frac{2}{15}\frac{r^3}{y^3}\right)\frac{(-\sin b \sin\theta \sin\omega)}{2}\sin\omega\, d\omega$$

$$= -\pi r^2 \delta\rho V \sin b \frac{1}{15}\frac{r^3}{c^3}.$$

Le signe — fait voir que la projection des quantités de mouvement sur $o'z'$ surpasse la projection sur $o'z$ et conséquemment que la force impulsive, différence de ces projections, est dirigée suivant $o'z$. Donc, en considérant cette portion de l'axe des z comme positive, nous devrons écrire

$$M\left(\frac{\Delta V'}{\Delta t}\right)Z' = +\pi r^2 \delta\rho V \sin b \frac{2}{15}\frac{r^3}{c^3}.$$

Puisque Z' n'est pas nul, l'atome o', au début de son mouvement, prendra une direction légèrement inclinée sur $o'x$; et, en appelant χ l'angle qui mesure cette inclinaison, nous aurons sensiblement

$$\operatorname{tang}\chi = \operatorname{tang} b \frac{4}{15}\frac{r}{c}\left(1 - \frac{2}{5}\frac{r}{c}\right).$$

ARTICLE II.

Action réciproque de deux atomes d'éther en mouvement.

Premier cas. — *Les deux atomes se meuvent le long de la ligne des centres.*

86. Supposons d'abord que les deux atomes o et o' se meuvent le long de la ligne des centres avec les vitesses V et V' de

même sens, et étudions l'influence du mouvement de o sur celui de o' qui marche en avant.

Dans ce cas, la direction de la vitesse ne change pas, et la variation de la quantité de mouvement de o' est donnée par la formule

$$M(\Delta V') = -2V'\Sigma mx^2 + 2\Sigma mvx;$$

or, si l'atome d'éther était isolé, on aurait

$$\Sigma mx^2 = \pi r^2 \delta \Delta t \left(\frac{v}{3} + \frac{V'^2}{5v}\right)$$

et

$$\Sigma mvx = -\pi r^2 \delta \Delta t \left(\frac{vV'}{3} - \frac{1}{15}\frac{V'^3}{v}\right).$$

L'influence de l'atome o se traduit par l'addition à Σmx^2 de l'intégrale

$$I = \int_0^{\omega_1} (n - n_1)\mu \cos^2\omega \frac{2\pi r^2 \sin\omega \, d\omega}{s},$$

et l'addition à Σmvx de l'intégrale

$$J = \int_0^{\omega_1} (q - q_1)\cos\omega \frac{2\pi r^2 \sin\omega \, d\omega}{s}.$$

Le calcul de ces deux intégrales donne

$$I = \pi r^2 \delta \Delta t \; V\left(\frac{1}{8}\frac{r^2}{c^2} + \frac{1}{30}\frac{r^3}{c^3} + \ldots\right),$$

$$J = \pi r^2 \delta \Delta t v V\left(\frac{1}{4}\frac{r^2}{c^2} + \frac{1}{10}\frac{r^3}{c^3} + \ldots\right);$$

par suite

$$M\frac{\Delta V'}{\Delta t} = \pi r^2 \delta \left[-\frac{4}{3} vV' + vV\left(\frac{1}{2}\frac{r^2}{c^2} + \frac{1}{5}\frac{r^3}{c^3}\right) + \ldots\right]$$

ou

$$\frac{\Delta V'}{\Delta t} = \frac{\delta v}{r}\left[-V' + V\left(\frac{3}{8}\frac{r^2}{c^2} + \frac{3}{20}\frac{r^3}{c^3}\right) + \ldots\right].$$

On trouverait de même

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\delta v}{r}\left[-V + V'\left(\frac{3}{8}\frac{r^2}{c^2} + \frac{3}{20}\frac{r^3}{c^3}\right)\right];$$

or nous avons vu qu'un atome isolé, au sein de l'éon, éprouve une résistance égale à $-\frac{\delta v}{r}V$.

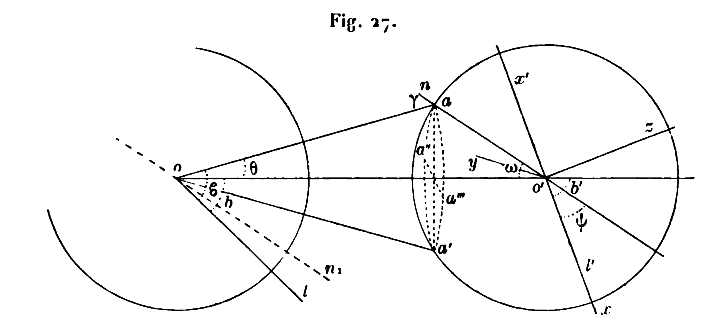
Donc, lorsque deux atomes d'éther voyagent côte à côte dans le même sens, la résistance diminue. Si, au lieu de deux atomes, il y en a trois, quatre, etc., à se mouvoir dans la même direction, l'aide mutuelle qu'ils se prêtent devient plus efficace et, en général, plus la compagnie est nombreuse, plus les mouvements sont facilités, comme nous le démontrerons plus loin (nº 102).

Si les atomes marchaient en sens opposé, il est évident que le contraire aurait lieu; la résistance serait accrue.

SECOND CAS. — *Les deux atomes se meuvent dans des directions quelconques.*

87. Supposons, en second lieu, que les atomes o et o', animés des vitesses V, V', se meuvent sur des droites quelconques

Fig. 27.



ol, $o'l'$. Ces droites font avec la ligne des centres deux angles plans b et b' et un dièdre $loo'l' = D$. Proposons-nous de calculer l'action de o sur o' dans le temps Δt.

Comme ici les axes principaux d'inertie des masses choquantes ne coïncident pas avec les lignes saillantes de la

figure, nous appliquerons les formules les plus générales du choc simultané (n° 52). En les résolvant et négligeant Σm en face de M, pour simplifier, on trouve

$$V'X' = VX + \frac{2}{M}(\Sigma mvx - VX\Sigma mx^2 - VY\Sigma mxy - VZ\Sigma mxz)$$

et deux formules analogues pour déterminer V'Y' et V'Z'.

Dans le cas actuel, la vitesse avant le choc étant V', nous désignerons la vitesse après le choc par W'. Nous choisirons pour axe des x la direction $o'l'$, pour axe des z une perpendiculaire à $o'l'$ menée dans le plan $oo'l'$ et enfin pour axe des y la normale au plan $zo'x$. Il résulte de ce choix que $X = 1$, $Y = 0$, $Z = 0$, et les équations qui déterminent la vitesse et la direction du mouvement de o' après le choc deviennent

$$(1)\quad \begin{cases} W'X' = V' + \frac{2}{M}(\Sigma mvx - V'\Sigma mx^2), \\ W'Y' = \frac{2}{M}(\Sigma mvy - V'\Sigma mxy), \\ W'Z' = \frac{2}{M}(\Sigma mvz - V'\Sigma mxz). \end{cases}$$

Si l'atome o' était isolé au sein de l'éon, on aurait

$$\Sigma mx^2 = \pi r^2 \delta \Delta t \frac{v}{3}, \quad \Sigma mvx = -\pi r^2 \delta \Delta t \frac{vV'}{3} \quad (\text{n}^\circ\ 70),$$
$$\Sigma mvy = \Sigma mvz = \Sigma mxy = \Sigma mxz = 0.$$

Il nous reste donc à apprécier l'influence du mouvement de l'atome o sur ces différentes sommes.

Nous savons que cette influence sur un élément s de o', situé en a, est caractérisée par les valeurs $n - n_1$, $q - q_1$ du n° 82, valeurs dont tous les termes contiennent le facteur $\frac{r^2}{c^2}$. Ce facteur, multiplié par $\frac{V'}{v}$, donne un produit dont la grandeur est du même ordre que $\frac{r^4}{c^4}$ et, par suite, négligeable. Nous avons admis, en effet, que nous pouvions négliger $\frac{V'^2}{v^2}$ au même

titre que $\frac{r^4}{c^4}$. Pour la même raison, nous pourrons donc négliger $\frac{V'}{v}\frac{r^2}{c^2}$; or, dans les formules (1), les sommes Σmvx, Σmvy, Σmvz contiennent le facteur v, et, si on le faisait sortir des trois parenthèses, les seconds termes de ces parenthèses deviendraient

$$-\frac{V'}{v}\Sigma m x^2, \quad -\frac{V'}{v}\Sigma m xy, \quad -\frac{V'}{v}\Sigma m xz,$$

et, comme le terme additionnel pour ces trois dernières sommes est de l'ordre $\frac{r^2}{c^2}$, on voit qu'il est inutile de le calculer pour le multiplier ensuite par $\frac{V'}{v}$ et le négliger.

Nous allons donc le calculer seulement pour Σmvx, Σmvy, Σmvz, et, dans ce calcul, nous ferons simplement

$$q - q_1 = \frac{\delta s \,\Delta t}{2} v V \cos 6 \cos^2\gamma \left(\frac{r^2}{y^2} - \frac{2}{15}\frac{r^3}{y^3}\right),$$

puisque nous avons reconnu (n° 85) que le dernier terme de cette différence, savoir $\sin 6 \sin^2\gamma \cos C \frac{r^3}{y^3}$, fournit une intégrale dont nous n'avons pas à tenir compte.

1° Σmvx. — Le terme additionnel pour Σmvx sera

$$\begin{aligned}&\Sigma(q - q_1)\cos\psi \\ &= \pi r^2 \delta \Delta t v V \int_0^{\omega_1} \cos 6 \cos^2\gamma \left(\frac{r^2}{y^2} - \frac{2}{15}\frac{r^3}{y^3}\right)\cos\psi \sin\omega \, d\omega.\end{aligned}$$

Or, en appelant A, A″ et B, B″ les dièdres $aoo'l$, $a''oo'l$ et $aoo'x$, $a''oo'x$, on a

$$\begin{aligned}\cos 6 &= \cos b \cos\theta + \sin b \sin\theta \cos A,\\ \cos 6' &= \cos b \cos\theta - \sin b \sin\theta \cos A,\\ \cos\psi &= \cos b' \cos\omega + \sin b' \sin\omega \cos B,\\ \cos\psi' &= \cos b' \cos\omega - \sin b' \sin\omega \cos B,\end{aligned}$$

d'où

$$\cos\beta\cos\psi + \cos\beta'\cos\psi' \\ = 2\cos b\cos b'\cos\theta\cos\omega + 2\sin b\sin b'\sin\theta\sin\omega\cos A\cos B.$$

De même,

$$\cos\beta''\cos\psi'' + \cos\beta'''\cos\psi''' \\ = 2\cos b\cos b'\cos\theta\cos\omega + 2\sin b\sin b'\sin\theta\sin\omega\cos A''\cos B''$$

et enfin

$$\cos\beta\cos\psi + \cos\beta'\cos\psi' + \ldots \\ = 4\cos b\cos b'\cos\theta\cos\omega + 2\sin b\sin b'\sin\theta\sin\omega\cos D.$$

Par suite, pour le groupe des quatre éléments a, a', a'', a''',

$$\Sigma(q - q_1)\cos\psi \\ = \frac{\pi r^2\delta\Delta t}{4} v V\int_0^{\omega_1}\cos^2\gamma\left(\frac{r^2}{y^2} - \frac{2}{15}\frac{r^3}{y^3}\right)\sin\omega\,d\omega \\ \times(4\cos b\cos b'\cos\theta\cos\omega + 2\sin b\sin b'\sin\theta\sin\omega\cos D);$$

or

$$\int_0^{\omega_1}\frac{r^2}{y^2}\cos^2\gamma\cos\theta\cos\omega\sin\omega\,d\omega = \frac{1}{4}\frac{r^2}{c^2} + \frac{2}{15}\frac{r^3}{c^3} + \ldots,$$

$$\int_0^{\omega_1}\frac{r^2}{y^2}\cos^2\gamma\sin\theta\sin^2\omega\,d\omega = \frac{2}{15}\frac{r^3}{c^3} + \ldots,$$

$$\int_0^{\omega_1}\frac{2}{15}\frac{r^3}{y^3}\cos^2\gamma\cos\theta\cos\omega\sin\omega\,d\omega = \frac{1}{30}\frac{r^3}{c^3} + \ldots,$$

et la quatrième intégrale partielle qui contient $\frac{r^3}{y^3}\sin\theta$ sous le signe $\int$ est négligeable.

Donc

$$\Sigma(q - q_1)\cos\psi = \pi r^2\delta\Delta t v V\left[\cos b\cos b'\left(\frac{1}{4}\frac{r^2}{c^2} + \frac{1}{10}\frac{r^3}{c^3}\right)\right. \\ \left. + \sin b\sin b'\cos D\frac{1}{15}\frac{r^3}{c^3}\right]$$

et

$$\Sigma mvx = \pi r^2 \delta \Delta t v \left[-\frac{V'}{3} + V \cos b \cos b' \left(\frac{1}{4} \frac{r^2}{c^2} + \frac{1}{10} \frac{r^3}{c^3} \right) \right.$$
$$\left. + V \sin b \sin b' \cos D \frac{1}{15} \frac{r^3}{c^3} \right].$$

Si l'on désigne par λ l'angle des deux directions ol et $o'l'$, on a

$$\cos\lambda = \cos b \cos b' + \sin b \sin b' \cos D,$$

et l'on peut écrire

$$\Sigma mvx = \pi r^2 \delta \Delta t v \left\{ -\frac{V'}{3} + V \left[\cos b \cos b' \left(\frac{1}{4} \frac{r^2}{c^2} + \frac{1}{30} \frac{r^3}{c^3} \right) + \cos\lambda \frac{1}{15} \frac{r^3}{c^3} \right] \right\}.$$

2° Σmvy. — Si nous appelons φ, φ', φ'', φ''' les angles $ao'y$, $a'o'y$, $a''o'y$, $a'''o'y$, le calcul de Σmvy ne différera du calcul précédent que par le changement de $\cos\psi$ en $\cos\varphi$. Or, en nommant E et E″ les dièdres $aoo'y$, $a''oo'y$, on aura

$$\cos\varphi = \sin\omega \cos E, \quad \cos\varphi' = -\sin\omega \cos E,$$
$$\cos\varphi'' = \sin\omega \cos E'', \quad \cos\varphi''' = -\sin\omega \cos E'',$$

d'où

$$\cos 6 \cos\varphi + \cos 6' \cos\varphi' + \cos 6'' \cos\varphi'' + \cos 6''' \cos\varphi'''$$
$$= 2 \sin b \sin\theta \sin\omega (\cos A \cos E + \cos A'' \cos E''),$$

mais

$$\cos A \cos E + \cos A'' \cos E'' = \cos(yoo'l) = \pm \sin D,$$

et le résultat du calcul est

$$\Sigma mvy = \pm \pi r^2 \delta \Delta t v V \sin b \sin D \frac{1}{15} \frac{r^3}{c^3}.$$

Cette expression, nulle pour $D = 0$, devra être prise positivement ou négativement suivant que les droites ol et $o'y$ seront du même côté ou de côtés différents du plan $oo'l'$.

3° Σmvz. — Pour calculer Σmvz, désignons par χ, χ', χ'', χ'''

les angles $ao'z$, $a'o'z$, $a''o'z$, $a'''o'z$ et par F et F'' les dièdres $aoo'z$, $a''oo'z$; nous aurons

$$\cos\chi = -\cos\omega\sin b' + \sin\omega\cos b'\cos F,$$
$$\cos\chi' = -\cos\omega\sin b' - \sin\omega\cos b'\cos F;$$

d'où

$$\begin{aligned}&\cos\beta\cos\chi + \cos\mathfrak{6}'\cos\chi'\\ &= -2\cos b\sin b'\cos\theta\cos\omega + 2\sin b\cos b'\sin\theta\sin\omega\cos A\cos F;\end{aligned}$$

on trouverait pareillement

$$\begin{aligned}&\cos\mathfrak{6}''\cos\chi'' + \cos\mathfrak{6}'''\cos\chi'''\\ &= -2\cos b\sin b'\cos\theta\cos\omega + 2\sin b\cos b'\sin\theta\sin\omega\cos A''\cos F''\end{aligned}$$

et, en ajoutant ces deux égalités membre à membre,

$$\begin{aligned}&\cos\mathfrak{6}\cos\chi + \ldots + \cos\mathfrak{6}''\cos\chi'' + \ldots\\ &= -4\cos b\sin b'\cos\theta\cos\omega\\ &\quad + 2\sin b\cos b'\sin\theta\sin\omega(\cos A\cos F + \cos A''\cos F'');\end{aligned}$$

mais

$$\cos A\cos F + \cos A''\cos F''' - \cos(zoo'l) = \mp\cos D,$$

suivant que la ligne des centres oo' passe ou ne passe pas dans l'angle $zo'x$, ou suivant que b' est aigu ou obtus. Nous aurons donc

$$\begin{aligned}&\Sigma(q - q_1)\cos\chi\\ &= \frac{\pi r^2\delta\,\Delta t\,v\mathrm{V}}{4}\int_0^{\omega_1}\cos^2\gamma\left(\frac{r^2}{y^2} - \frac{2}{15}\frac{r^3}{y^3}\right)\sin\omega\,d\omega\\ &\quad\times[-4\cos b\sin b'\cos\theta\cos\omega \mp 2\sin b\cos b'\sin\theta\sin\omega\cos D]\\ &= -\pi r^2\delta\,\Delta t\,v\mathrm{V}\left[\cos b\sin b'\left(\frac{1}{4}\frac{r^2}{c^2} + \frac{1}{10}\frac{r^3}{c^3}\right)\right.\\ &\qquad\left.\pm\sin b\cos b'\cos D\,\frac{1}{15}\frac{r^3}{c^3}\right].\end{aligned}$$

Nous observerons ici, comme à la fin de l'article I de ce

Chapitre, que le signe de Σmvz doit être changé et pris positivement, en sorte que

$$\Sigma mvz = \pi r^2 \delta \Delta t v V \left[\cos b \sin b' \left(\frac{1}{4}\frac{r^2}{c^2} + \frac{1}{10}\frac{r^3}{c^3}\right) \pm \sin b \cos b' \cos D \frac{1}{15}\frac{r^3}{c^3}\right].$$

Si l'on appelle μ' l'angle des deux directions $o'z$ et ol, on peut remarquer encore que

$$\cos\mu' = \cos b \sin b' \pm \sin b \cos b' \cos D$$

et écrire

$$\Sigma mvz = \pi r^2 \delta \Delta t v V \left[\cos b \sin b' \left(\frac{1}{4}\frac{r^2}{c^2} + \frac{1}{30}\frac{r^3}{c^3}\right) + \cos\mu' \frac{1}{15}\frac{r^3}{c^3}\right].$$

A l'aide de toutes les données qui précèdent, le système des équations (1) devient, en posant $\frac{\delta v}{r} = k$,

$$''X' - V' = k\Delta t \left\{ -V' + V\left[\cos b \cos b' \left(\frac{3}{8}\frac{r^2}{c^2} + \frac{1}{20}\frac{r^3}{c^3}\right) + \tfrac{1}{10}\cos\lambda \frac{r^3}{c^3}\right]\right\},$$

$$''Y' = \pm k \Delta t V \sin b \sin D \frac{1}{10}\frac{r^3}{c^3},$$

$$''Z' = k\Delta t V \left[\cos b \sin b' \left(\frac{3}{8}\frac{r^2}{c^2} + \frac{1}{20}\frac{r^3}{c^3}\right) + \tfrac{1}{10}\cos\mu' \frac{r^3}{c^3}\right].$$

Soient maintenant ξ', η', ζ' les variations très petites des angles que la direction du mouvement de o' fait avec les axes, dans le temps Δt, on aura

$$X' = \cos\xi' = 1 - \frac{\xi'^2}{2} + \ldots,$$

$$Y' = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \eta'\right) = -\sin\eta' = -\eta',$$

$$Z' = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \zeta'\right) = -\sin\zeta' = -\zeta'.$$

Par suite, en négligeant $\frac{\xi'^2}{2}$, on aura approximativement

$$W'X' - V' = \Delta V', \quad W'Y' = -V'\eta', \quad W'Z' = -V'\zeta',$$

et en passant à la limite

$$\frac{dV'}{dt} = k\left\{-V'+V\left[\cos b \cos b'\left(\frac{3}{8}\frac{r^2}{c^2}+\frac{1}{20}\frac{r^3}{c^3}\right)+\tfrac{1}{10}\cos\lambda\frac{r^3}{c^3}\right]\right\},$$

$$-\frac{\eta'}{dt} = \pm k\frac{V}{V'}\sin b \sin D\frac{1}{10}\frac{r^3}{c^3},$$

$$-\frac{\zeta'}{dt} = k\frac{V}{V'}\left[\cos b \sin b'\left(\frac{3}{8}\frac{r^2}{c^2}+\frac{1}{20}\frac{r^3}{c^3}\right)+\tfrac{1}{10}\cos\mu'\frac{r^3}{c^3}\right].$$

Les formules qui expriment l'action de o' sur o se déduisent des précédentes en changeant b en b' et b' en b, V en V' et V' en V, η' et ζ' en η et ζ, et enfin μ' en μ. De la sorte on trouve

$$\frac{dV}{dt} = k\left\{-V+V'\left[\cos b \cos b'\left(\frac{3}{8}\frac{r^2}{c^2}+\frac{1}{20}\frac{r^3}{c^3}\right)+\tfrac{1}{10}\cos\lambda\frac{r^3}{c^3}\right]\right\},$$

$$-\frac{\eta}{dt} = \pm k\frac{V'}{V}\sin b' \sin D\frac{1}{10}\frac{r^3}{c^3},$$

$$-\frac{\zeta}{dt} = k\frac{V'}{V}\left[\cos b' \sin b\left(\frac{3}{8}\frac{r^2}{c^2}+\frac{1}{20}\frac{r^3}{c^3}\right)+\tfrac{1}{10}\cos\mu\frac{r^3}{c^3}\right].$$

Dans ces formules ζ' et ζ représentent sensiblement les variations des angles b' et b, de sorte qu'on peut les remplacer par db' et db. La somme des variations η' et η représente aussi approximativement la variation du dièdre D, si l'on convient d'élever la perpendiculaire $o'y$ sur le plan $oo'l'$ du même côté que le plan $oo'l$ et pareillement d'élever la perpendiculaire sur le plan $oo'l$ du même côté que le plan $oo'l'$. D'ailleurs avec ces conventions le signe de Σmcy est toujours positif, et l'on a

$$\frac{dD}{dt} = \frac{\eta'+\eta}{dt} = -k\left(\frac{V\sin b}{V'}+\frac{V'\sin b'}{V}\right)\sin D\frac{1}{10}\frac{r^3}{c^3}.$$

Enfin la variation de la distance oo' est égale à

$$(V'\cos b' - V\cos b)\,dt$$

et l'on a, pour déterminer en fonction du temps les six va-

riables V, V′, b, b', c et D, le système des six équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases}
(1)\quad \dfrac{dV}{dt} = k\left\{-V + V'\left[\cos b\cos b'\left(\dfrac{3}{8}\dfrac{r^2}{c^2} + \dfrac{1}{20}\dfrac{r^3}{c^3}\right) + \dfrac{1}{10}\cos\lambda\dfrac{r^3}{c^3}\right]\right\},\\
(2)\quad \dfrac{dV'}{dt} = k\left\{-V' + V\left[\cos b\cos b'\left(\dfrac{3}{8}\dfrac{r^2}{c^2} + \dfrac{1}{20}\dfrac{r^3}{c^3}\right) + \dfrac{1}{10}\cos\lambda\dfrac{r^3}{c^3}\right]\right\},\\
(3)\quad \dfrac{db}{dt} = -k\dfrac{V'}{V}\left[\cos b'\sin b\left(\dfrac{3}{8}\dfrac{r^2}{c^2} + \dfrac{1}{20}\dfrac{r^3}{c^3}\right) + \dfrac{1}{10}\cos\mu\dfrac{r^3}{c^3}\right],\\
(4)\quad \dfrac{db'}{dt} = -k\dfrac{V}{V'}\left[\cos b\sin b'\left(\dfrac{3}{8}\dfrac{r^2}{c^2} + \dfrac{1}{20}\dfrac{r^3}{c^3}\right) + \dfrac{1}{10}\cos\mu'\dfrac{r^3}{c^3}\right],\\
(5)\quad \dfrac{dc}{dt} = V'\cos b' - V\cos b,\\
(6)\quad \dfrac{dD}{dt} = -k\left(\dfrac{V\sin b}{V'} + \dfrac{V'\sin b'}{V}\right)\sin D\dfrac{1}{10}\dfrac{r^3}{c^2}\Big].
\end{cases}$$

Les trois angles λ, μ et μ' sont liés entre eux par les relations

$$\cos b\cos\lambda + \sin b\cos\mu' = \cos b'$$

et

$$\cos b'\cos\lambda' + \sin b'\cos\mu = \cos b.$$

Si l'on préfère ne pas introduire dans les équations différentielles les angles auxiliaires λ, μ et μ', les quatre premières s'écriront

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dV}{dt} = k\Big[-V + V'\cos b\cos b'\left(\dfrac{3}{8}\dfrac{r^2}{c^2} + \dfrac{3}{20}\dfrac{r^3}{c^3}\right)\\ \qquad + V'\sin b\sin b'\cos D\dfrac{1}{10}\dfrac{r^3}{c^3}\Big],\end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dV'}{dt} = k\Big[-V' + V\cos b\cos b'\left(\dfrac{3}{8}\dfrac{r^2}{c^2} + \dfrac{3}{20}\dfrac{r^3}{c^3}\right)\\ \qquad + V\sin b\sin b'\cos D\dfrac{1}{10}\dfrac{r^3}{c^3}\Big],\end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{db}{dt} = -k\dfrac{V'}{V}\Big[\cos b'\sin b\left(\dfrac{3}{8}\dfrac{r^2}{c^2} + \dfrac{3}{20}\dfrac{r^3}{c^3}\right)\\ \qquad + \sin b'\cos b\cos D\dfrac{1}{10}\dfrac{r^3}{c^3}\Big],\end{cases}$$

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{db'}{dt} = -k\frac{V}{V'}\Bigg[&\cos b \sin b'\left(\frac{3}{8}\frac{r^2}{c^2} + \frac{3}{20}\frac{r^3}{c^3}\right) \\ &+ \sin b \cos b' \cos D \frac{1}{10}\frac{r^3}{c^3}\Bigg]. \end{aligned} \right.$$

ARTICLE III.

Lois du mouvement de deux atomes d'éther soumis à leur influence réciproque.

88. Ces lois se déduisent du système d'équations différentielles établi dans l'article précédent.

Ce système nous montre d'abord que le principe de la réaction égale à l'action ne s'applique pas, comme on le suppose d'ordinaire, à l'influence réciproque de deux atomes d'éther, et que cette influence ne dépend pas seulement de la distance, mais aussi de la grandeur et de la direction des vitesses.

Les équations (1) et (2) prouvent que les résistances sont diminuées et, par suite, que les deux atomes s'entr'aident à prolonger leur course, lorsque le produit $\cos b \cos b'$ est positif, c'est-à-dire lorsque les projections des mobiles sur la ligne des centres marchent dans le même sens. Si, au contraire, elles se meuvent en sens opposé, le produit $\cos b \cos b'$ est négatif, la résistance croît et les vitesses diminuent plus rapidement.

Les équations (3) et (4) manifestent les variations que subissent les angles b et b' par suite de l'influence réciproque des atomes. Si ces deux angles sont aigus, ils vont sans cesse en diminuant, et la direction des vitesses se rapproche de la la ligne des centres. S'ils sont tous deux obtus, ils vont en augmentant et, par suite, la direction des vitesses se rapproche encore de la ligne des centres, mais en sens opposé. Si l'un est aigu et l'autre obtus, le premier augmente et le second diminue, de sorte que leur différence décroît, et, du moment qu'ils deviennent tous les deux aigus ou obtus, ils sont soumis à la loi indiquée tout à l'heure.

Donc, par suite de leur influence réciproque, les deux atomes mobiles ont une tendance générale à diriger leurs mou-

vements dans le même sens, le long de la ligne des centres.

Ils tendent aussi à égaliser leurs vitesses; car, si V est plus grand que V', la résistance $\frac{dV'}{dt}$ sera moindre que $\frac{dV}{dt}$. Par suite, V diminuera plus rapidement que V' et ira en s'en rapprochant.

La cinquième équation nous montre que les deux atomes s'éloignent ou se rapprochent suivant que la différence

$$V'\cos b' - V\cos b$$

est positive ou négative.

Enfin, la sixième prouve que le dièdre D va toujours en diminuant.

En résumé, les deux atomes tendent à se mouvoir dans le même plan, suivant la même droite, dans le même sens et avec la même vitesse.

Après ces considérations tirées de l'examen général des équations différentielles, abordons leur intégration.

L'équation (5) différentiée devient

$$\frac{d^2c}{dt^2} = \cos b' \frac{dV'}{dt} - V'\sin b' \frac{db'}{dt} - \cos b \frac{dV}{dt} + V\sin b \frac{db}{dt},$$

et, si l'on remplace les dérivées contenues dans le second membre par leurs valeurs tirées du système (a), on arrive à l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2c}{dt^2} + k\frac{dc}{dt}\left(1 + \frac{3}{8}\frac{r^2}{c^2} + \frac{3}{20}\frac{r^3}{c^3}\right) = 0.$$

En appelant c_0 et c'_0 les valeurs à l'origine de c et $\frac{dc}{dt}$, on trouve, par une première intégration,

$$\frac{dc}{dt} = c'_0 + k(c_0 - c)\left[1 + \frac{3}{8}\frac{r^2}{c_0 c} + \frac{3}{40}\frac{r^3(c_0 + c)}{c_0^2 c^2}\right].$$

D'autre part, les équations (1) et (2) donnent l'équation très simple

$$V\frac{dV}{dt} - V'\frac{dV'}{dt} = -k(V^2 - V'^2),$$

d'où

$$V^2 - V'^2 = (V_0^2 - V_0'^2)e^{-2kt}.$$

Or, si chacun des atomes o et o' était isolé dans l'éon, leur mouvement serait réglé par les formules

$$V = V_0 e^{-kt}, \quad V' = V'_0 e^{-kt},$$

d'où

$$V^2 - V'^2 = (V_0^2 - V_0'^2) e^{-2kt}.$$

Donc l'influence réciproque des deux atomes ne modifie pas la différence du carré de leurs vitesses ou la différence de leurs énergies.

Maintenant, pour arriver plus simplement aux valeurs approchées des quatre variables V, V', b, b', nous allons négliger les termes qui contiennent $\frac{r^3}{c^3}$. Les quatre premières équations du système (a) deviennent alors

$$(1) \qquad \frac{dV}{dt} = k\left(-V + V' \cos b \cos b' \frac{3}{8} \frac{r^2}{c^2}\right),$$

$$(2) \qquad \frac{dV'}{dt} = k\left(-V' + V \cos b \cos b' \frac{3}{8} \frac{r^2}{c^2}\right),$$

$$(3) \qquad \frac{db}{dt} = -k \frac{V'}{V} \cos b' \sin b \frac{3}{8} \frac{r^2}{c^2},$$

$$(4) \qquad \frac{db'}{dt} = -k \frac{V}{V'} \cos b \sin b' \frac{3}{8} \frac{r^2}{c^2}.$$

De l'équation (1) on tire

$$k V' \cos b' \frac{3}{8} \frac{r^2}{c^2} = \frac{\frac{dV}{dt} + kV}{\cos b},$$

et, en portant cette valeur dans (3), on a

$$\frac{\cos b \, db}{\sin b} = -\frac{dV}{V} - k\,dt$$

et, en intégrant,

$$l \sin b = -lV - kt + C,$$

d'où

$$V \sin b = V_0 \sin b_0 e^{-kt}.$$

On trouverait de même

$$V' \sin b' = V'_0 \sin b'_0 e^{-kt},$$

d'où

$$V^2\sin^2 b - V'^2\sin^2 b' = (V_0^2\sin^2 b_0 - V'^2_0\sin^2 b'_0)e^{-2kt},$$

et, comme

$$V^2 - V'^2 = (V_0^2 - V_0'^2)e^{-2kt},$$

on a aussi

$$V^2\cos^2 b - V'^2\cos^2 b' = (V_0^2\cos^2 b_0 - V_0'^2\cos^2 b'_0)e^{-2kt};$$

or

$$V\cos b - V'\cos b' = -\frac{dc}{dt};$$

par suite, en posant

$$\frac{dc}{dt} = c' \quad \text{et} \quad V_0^2\cos^2 b_0 - V_0'^2\cos^2 b'_0 = A,$$

on a

$$V\cos b + V'\cos b' = \frac{Ae^{-2kt}}{-c'}$$

et

$$V\cos b = -\frac{Ae^{-2kt} + c'^2}{2c'},$$

$$V'\cos b' = -\frac{Ae^{-2kt} - c'^2}{2c'}.$$

Élevant au carré les valeurs de $V\sin b$ et $V\cos b$, puis ajoutant, on a

$$V^2 = V_0^2\sin^2 b_0 e^{-2kt} + \left(\frac{Ae^{-2kt} + c'^2}{2c'}\right)^2;$$

de même

$$V'^2 = V_0'^2\sin^2 b_0'^2 e^{-2kt} + \left(\frac{Ae^{-2kt} - c'^2}{2c'}\right)^2.$$

On obtient aussi par division

$$\tang b = -\frac{2c'V_0\sin b_0 e^{-kt}}{Ae^{-2kt} + c'^2},$$

$$\tang b' = -\frac{2c'V'_0\sin b'_0 e^{-kt}}{Ae^{-2kt} - c'^2}.$$

Les quatre variables V, V', b, b' se trouvent ainsi détermi-

nées en fonction du temps et de c' ou $\frac{dc}{dt}$; mais

$$\frac{dc}{dt} = c'_0 + k(c_0 - c)\left(1 + \frac{3}{8}\frac{r^2}{c_0 c}\right),$$

et cette équation peut s'intégrer et fournir la valeur de c' correspondant à une valeur donnée du temps. Donc les variables peuvent être considérées comme déterminées en fonction du temps.

Reste le dièdre D dont les variations dépendent seulement d'un terme en $\frac{r^3}{c^3}$ et, par suite, sont plus lentes que celles des autres quantités. Pour calculer sa valeur au bout du temps t, on utilisera les valeurs de V, V', b, b' et c exprimées en fonction de t, et l'équation (6) pourra s'écrire

$$\frac{dD}{\sin D} = -k f(t)\,dt,$$

d'où

$$\log\operatorname{tang}\frac{D}{2} = -k\int_0^t f(t)\,dt.$$

Comme application particulière, examinons en finissant le cas très simple où les vitesses, à l'origine, sont égales, parallèles et de même sens; alors on a

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV'}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{db}{dt} = \frac{db'}{dt}.$$

Donc les vitesses restent constamment égales et parallèles; de plus, c est constant, car $\frac{dc}{dt} = 0$.

ARTICLE IV.

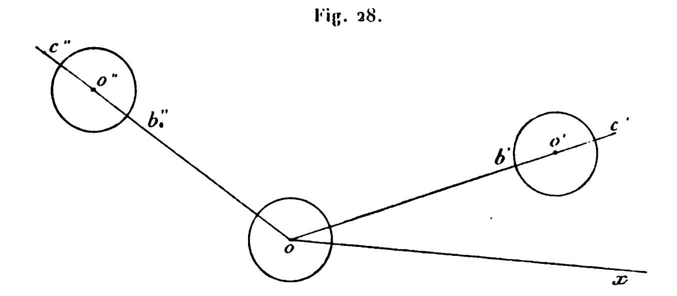
Conclusion sur l'élasticité de l'éther.

89. Nous avons vu (n° 69) que les courants éoniens se font équilibre autour d'un atome d'éther, s'il est en repos; mais, s'il se meut, les courants, tous égaux avant l'incidence, ont

des intensités différentes après la réflexion. Ils sont, comme les chocs, plus forts en avant et plus faibles en arrière du mouvement, et cette variation d'intensité suffit pour amener à conclure que l'éther est un milieu élastique. Il s'ensuit, en effet, que l'atome mobile doit attirer ou repousser les atomes voisins, suivant qu'il s'en éloigne ou s'en approche.

Soient, par exemple, les trois atomes o, o', o'' (*fig.* 28), dont le premier se meut dans la direction ox et les deux autres sont

Fig. 28.



en repos. L'atome o' dont o s'approche recevra des courants plus intenses du côté b' que du côté c', et sera repoussé; l'atome o'' dont o s'éloigne recevra des courants moins intenses du côté b'' que du côté c'', et sera attiré. Cette force qui attire d'un côté et repousse de l'autre est ce que nous appelons *la force élastique engendrée dans le milieu par le mouvement de ses atomes*. Elle est très distincte de la force élastique propre de chaque atome, qui a pour but de lui conserver sa forme et qui ne s'exerce que dans les deux phases du choc.

Les lois de l'élasticité propre de chaque atome sont comprises dans les formules du choc, soit simple, soit simultané. Les lois de l'élasticité du milieu éthéré s'obtiennent en calculant l'action qu'un atome mobile exerce sur un atome voisin par l'intermédiaire des courants éoniens réfléchis, et les articles précédents ont été consacrés au développement de ces calculs.

La force élastique est souvent entendue dans un sens différent de celui que nous avons donné à cette expression. Nous n'avons considéré que l'influence réciproque de deux atomes ou la force élastique élémentaire, tandis que souvent, par force

élastique agissant en un point, on entend la résultante de toutes les forces élémentaires qui lui sont appliquées; mais il est clair que si l'on connaissait exactement la position de tous les atomes qui exercent une action appréciable sur ce point, si l'on connaissait en outre leurs vitesses en grandeur et en direction, la détermination de la résultante se ramènerait à une sommation de termes connus.

Le fait élémentaire, que nous considérons comme caractéristique de l'élasticité des milieux, est inexplicable dans l'hypothèse des actions à distance.

Soient deux atomes o et o' distants d'une longueur $oo' = \zeta$, et soit $F(\zeta)$ la fonction qui représente leur action mutuelle. Si cette fonction a la forme qu'on lui prête souvent, $\frac{c}{\zeta^n}$, c étant une constante, il est évident que son signe sera toujours celui de c et que la force sera toujours attractive ou toujours répulsive, quels que soient les déplacements des atomes. Mais laissons la forme de la fonction indéterminée. Est-il possible de lui en assigner une telle que, pour toute valeur initiale de ζ, l'action soit attractive ou répulsive suivant que ζ augmente ou diminue? Évidemment non. Soit ζ_0 une valeur initiale. Pour que $F(\zeta_0 + d\zeta)$ et $F(\zeta_0 - d\zeta)$ soient de signes contraires, il faut qu'on ait $F(\zeta_0) = o$. La propriété signalée ne pourrait donc exister que pour certaines distances déterminées et n'aurait pas la généralité que requiert, selon nous, l'élasticité des milieux.

Cette impuissance de l'hypothèse des actions à distance sans intermédiaire, pour expliquer la propriété fondamentale des milieux élastiques, a porté Lamé à ériger cette propriété en principe (¹).

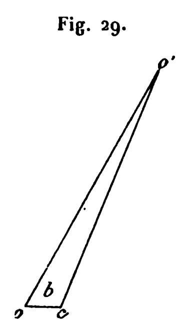
Pour lui, la force élémentaire qui s'exerce entre deux molécules voisines m et m' est une fonction de la distance primitive ζ de ces deux molécules et de l'écartement $\Delta\zeta$, c'est-à-dire de la quantité très petite dont elles se sont rapprochées ou éloignées. Il prend pour mesure de cette force le produit

(¹) *Leçons sur la Théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, n° 4.

$F(\zeta)\Delta\zeta$, et il obtient ainsi une action attractive ou répulsive, suivant que $\Delta\zeta$ est positif ou négatif; mais introduire le facteur $\Delta\zeta$ dans l'expression de la force, c'est renoncer à la théorie pure des actions à distance et se rapprocher de la nôtre.

En effet, si oc (*fig.* 29) représente le chemin parcouru par l'atome o, dans le temps Δt, avec la vitesse V, dans une direction

Fig. 29.



qui fait un angle b avec la ligne des centres oo', l'écartement $\Delta\zeta = V \cos b\, \Delta t$. On fait donc intervenir, dans l'expression de la force élastique élémentaire, la grandeur et la direction de la vitesse de l'atome o, et cela sans en donner de raison, tandis que cette intervention est une conséquence nécessaire de notre système.

Observations. — Après avoir établi les formules relatives à l'élasticité de l'éther, il me reste à les mettre en œuvre et à les appliquer aux phénomènes naturels, pour juger de leur fécondité. Bien que j'aie foi dans mon système, je ne puis cependant le regarder comme l'expression certaine de la vérité; et le lecteur, si bienveillant qu'il soit, ne peut le considérer que comme une hypothèse. Or, pour qu'une hypothèse nouvelle soit admise dans la Science, il faut qu'elle manifeste sa supériorité en rendant compte de faits demeurés jusque-là sans explication. Laissant donc de côté certaines lois physiques qui découlent de mon système aussi bien que de plusieurs autres, j'ai choisi, comme pierre de touche, pour éprouver sa valeur, un fait généralement admis et dont l'interprétation physique échappe à toutes les hypothèses mises en avant jusqu'ici sur la constitution de l'éther : je veux parler

de l'impuissance de ce fluide à propager les vibrations longitudinales.

J'ai donc mis tout d'abord ma théorie sur l'élasticité de l'éther en face de cet énigme, et je lui en ai demandé la solution. C'est l'objet du Chapitre VI et dernier de ce Volume. Son titre : *L'éther propagateur des mouvements vibratoires*, pourrait comprendre l'étude des phénomènes d'interférence et de diffraction; mais je me bornerai aux considérations propres à conduire au but indiqué, considérations qui seront en même temps le point de départ d'une véritable théorie mécanique de la lumière, sans action à distance.

CHAPITRE VI.

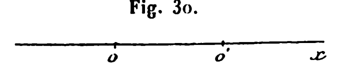
L'ÉTHER PROPAGATEUR DES MOUVEMENTS VIBRATOIRES.

ARTICLE I.

Action d'un atome vibrant sur un atome en repos.

90. Soient les deux atomes d'éther o et o' (*fig.* 30); et supposons que, par une cause quelconque, l'atome o se mette

Fig. 30.



à vibrer dans la direction $oo'x$, suivant une loi représentée par l'équation

$$x = -a \cos \frac{2\pi t}{\mathrm{T}} \quad \text{ou} \quad \mathrm{V} = a \frac{2\pi}{\mathrm{T}} \sin \frac{2\pi t}{\mathrm{T}},$$

et étudions l'influence que son mouvement vibratoire exerce sur o'.

Le mouvement de celui-ci sera réglé par l'équation

$$\frac{d\mathrm{V}'}{dt} = -k\mathrm{V}' + k\left(\frac{3}{8}\frac{r^2}{c^2} + \frac{3}{20}\frac{r^3}{c^3}\right)\mathrm{V},$$

et, si l'on admet que l'amplitude du mouvement vibratoire est très petite par rapport à la distance $oo' = c$, on pourra considérer cette dernière comme constante; et en posant

$$b = \frac{3}{8}\frac{r^2}{c^2} + \frac{3}{20}\frac{r^3}{c^3},$$

on aura

$$\frac{d\mathrm{V}'}{dt} + k\mathrm{V}' - kb\mathrm{V} = 0;$$

d'où

$$V' = e^{-kt}\left(C + abk\frac{2\pi}{T}\int e^{kt}\sin 2\pi\frac{t}{T}dt\right),$$

puis

$$V' = Ce^{-kt} + abk\sin\varphi\sin\left(2\pi\frac{t}{T} - \varphi\right),$$

en posant

$$\sin\varphi = \frac{\frac{2\pi}{T}}{\sqrt{k^2 + \frac{4\pi^2}{T^2}}}.$$

Observons que les atomes d'éon mettent un certain temps $\tau = \frac{c}{v}$ à transmettre l'influence de o en o' et que, par suite, l'action exercée en o' au temps t est émanée de o au temps $t - \tau$. Si donc on veut tenir compte de cet intervalle excessivement petit, il faudra, dans l'équation différentielle, remplacer V par $a\frac{2\pi}{T}\sin\frac{2\pi(t-\tau)}{T}$, et l'on trouvera ainsi

$$V' = Ce^{-kt} + abk\sin\varphi\sin\left[\frac{2\pi}{T}(t-\tau) - \varphi\right].$$

Pour $t = \tau$, $V' = 0$; et l'on a par suite

$$C = e^{k\tau}abk\sin^2\varphi.$$

Cette valeur de C est très petite, puisque

$$k\tau = \frac{\delta v}{r}\frac{c}{v} = \delta : \frac{r}{c}$$

et que l'ordre de petitesse de δ est supérieur à celui de $\frac{r}{c}$. D'autre part, comme k est très grand, e^{-kt} décroît très rapidement avec le temps. Donc, au bout d'un temps extrêmement court, le produit Ce^{-kt} s'évanouira sensiblement et le mouvement de o' sera réglé par l'équation

$$V' = abk\sin\varphi\sin\left[\frac{2\pi(t-\tau)}{T} - \varphi\right].$$

En définitive, après quelques instants d'état variable,

l'atome o' prendra un mouvement vibratoire régulier, de même période que celui de o, mais d'une amplitude beaucoup plus faible,

$$2ab\frac{k}{\sqrt{k^2+\frac{4\pi^2}{T^2}}}=2ab\cos\varphi.$$

Si l'on imaginait, sur le prolongement de la ligne oo', une file d'atomes équidistants o'', o''', ..., $o^{(n)}$, on trouverait que, sous l'influence du mouvement vibratoire de o, transmis par les intermédiaires o', o'', o''', ..., l'atome $o^{(n)}$ aurait pour amplitude de ses vibrations $2a(b\cos\varphi)^n$, c'est-à-dire que, la distance au point o croissant en progression arithmétique, l'amplitude décroîtrait en progression géométrique, avec une rapidité extrême, puisque la raison $b\cos\varphi$ est très petite [1]. Par conséquent, un atome seul est incapable de propager à une distance sensible une vibration appréciable.

Dans le cas où la direction du mouvement vibratoire de l'atome o ferait un angle α avec la ligne des centres oo', on remplacerait a par $a\cos\alpha$ dans les formules précédentes, et l'amplitude de la vibration de o' serait seule modifiée, puisque la période T et la phase $\varphi+2\pi\frac{\tau}{T}$ sont indépendantes de a.

91. De ce que l'amplitude des vibrations de o' est proportionnelle à $\cos\alpha$, il suit qu'elle atteint son maximum pour $\alpha=0$ et devient nulle pour $\alpha=90°$. En conséquence, un atome d'éther seul est bien plus apte à propager des vibrations longitudinales que des vibrations transversales. Au premier abord, ce résultat me causa de l'étonnement, je dirai même du découragement, et me fit douter de mes calculs et

---

[1] Ceci n'est exact qu'au point de vue abstrait d'une file d'atomes d'éther entièrement isolés. Dans la réalité, un atome vibrant o est toujours entouré d'une foule de compagnons, et il n'agit pas seulement sur $o^{(n)}$ par l'intermédiaire de la file o', o'', o''', ...; mais il peut agir aussi par l'intermédiaire de tous les autres atomes du milieu auxquels son action se fait sentir, soit directement, soit indirectement. De fait, il y a donc lieu d'établir ici un principe, sinon identique, du moins analogue au principe d'Huygens, et nous le préciserons plus tard.

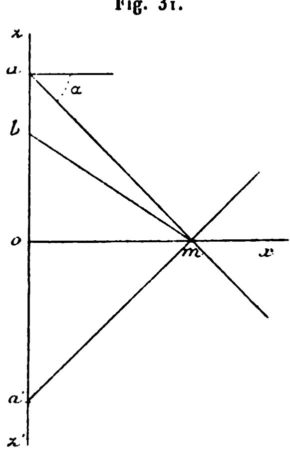
de ma théorie; car j'étais partisan des vibrations transversales de la lumière, et je croyais impossible de les expliquer dans mon système. Je fus ensuite d'autant plus agréablement surpris, quand l'étude, non plus d'un atome isolé, mais des vibrations simultanées d'une multitude d'atomes me fit reconnaître que la transmission des vibrations transversales était beaucoup plus facile que celle des vibrations longitudinales, ainsi que je vais l'expliquer dans les articles suivants.

ARTICLE II.

Action d'une file d'atomes vibrants sur un atome et une file d'atomes en repos.

92. Imaginons sur l'axe zz' (*fig.* 31) une série d'atomes d'éther équidistants, symétriquement placés par rapport au

Fig. 31.



point o et animés d'un même mouvement vibratoire représenté par l'équation

$$V = a\frac{2\pi}{T}\sin 2\pi\frac{t}{T}.$$

Supposons d'abord que la direction commune des vibrations soit perpendiculaire à zz' et parallèle à l'axe ox, sur

lequel se trouve l'atome m en repos, et cherchons la résultante de toutes les influences émanées des atomes de la file et dirigées vers m, qui agissent simultanément sur cet atome. Pour y parvenir, considérons l'action de deux atomes symétriques a et a'. Le premier, dans un temps Δt assez court pour qu'on puisse considérer V comme constant, exercera sur m une action dirigée suivant am et sensiblement égale à $\frac{3}{8}k\frac{r^2}{am^2}\mathrm{V}\,\Delta t\cos\alpha$; et l'atome a' exercera une action de même valeur dirigée suivant $a'm$. De plus, ces deux actions seront en même temps attractives ou répulsives; donc leur résultante sera dirigée suivant ox et égale à

$$\tfrac{3}{4}k\frac{r^2}{am^2}\mathrm{V}\,\Delta t\cos^2\alpha \quad \text{ou} \quad \tfrac{3}{4}k\frac{r^2x^2}{(x^2+z^2)^2}\mathrm{V}\,\Delta t,$$

en posant

$$om = x \quad \text{et} \quad oa = z.$$

Mais, si nous appelons t le temps où cette influence de a et a' s'exerce en m, elle sera émanée de ces deux atomes au temps $t - \frac{am}{v}$ ou $t - \frac{\sqrt{x^2+z^2}}{v}$, en désignant par v la vitesse moyenne de l'éon. Cette vitesse n'est constante ni pour différentes directions am, bm au même instant, ni pour la même direction am à différents instants; mais ses variations sont comprises entre $\pm 2\mathrm{V}$, et, comme nous supposerons la vitesse moyenne v très grande par rapport à V, l'erreur commise dans l'estimation du temps employé à transmettre en m l'influence des atomes de la file est excessivement faible et peut être négligée.

Nous pouvons donc représenter la résultante de toutes ces influences par

$$\Sigma\,\tfrac{3}{4}k\frac{r^2x^2}{(x^2+z^2)^2}\,a\frac{2\pi}{\mathrm{T}}\sin\frac{2\pi}{\mathrm{T}}\left(t-\frac{\sqrt{x^2+z^2}}{v}\right)\Delta t.$$

Dans cette somme, z prendra toutes les valeurs c, $2c$, $3c$, ... jusqu'à l'infini; mais, s'il existe un atome en o, pour le comprendre dans la somme, on fera varier z de $-\infty$ à $+\infty$, et

l'on écrira $\frac{3}{8}$ au lieu de $\frac{3}{4}$ sous le signe somme. Si alors on pose

$$\frac{3}{8}\frac{r^2}{c^2}=b, \quad x=cx', \quad z=cz',$$

la résultante prendra la forme

$$abk\frac{2\pi}{T}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{x'^2}{(x'^2+z'^2)^2}\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{c}{v}\sqrt{x'^2+z'^2}\right)\Delta t,$$

z' passant par toutes les valeurs de la suite des nombres naturels.

Enfin, si nous désignons par g et g' les deux sommes

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{x'^2}{(x'^2+z'^2)^2}\cos\frac{2\pi c}{Tv}\sqrt{x'^2+z'^2}$$

et

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{x'^2}{(x'^2+z'^2)^2}\sin\frac{2\pi c}{Tv}\sqrt{x'^2+z'^2},$$

la résultante deviendra

$$abk\frac{2\pi}{T}\left(g\sin\frac{2\pi t}{T}-g'\cos\frac{2\pi t}{T}\right)dt,$$

et le mouvement de l'atome m sera déterminé par l'équation

$$dV'+kV'dt-abk\frac{2\pi}{T}\left(g\sin\frac{2\pi t}{T}-g'\cos\frac{2\pi t}{T}\right)=0,$$

d'où

$$V'=C'e^{-kt}+abk\sin\varphi\left[g\sin\left(\frac{2\pi t}{T}-\varphi\right)-g'\cos\left(\frac{2\pi t}{T}-\varphi\right)\right]$$

et, après la courte période d'état variable,

$$V'=abk\sin\varphi\left[g\sin\left(\frac{2\pi t}{T}-\varphi\right)-g'\cos\left(\frac{2\pi t}{T}-\varphi\right)\right].$$

Cette formule indique pour m un mouvement vibratoire de

même période que celui des atomes de la file, et dont l'amplitude est

$$2ab\cos\varphi\sqrt{g^2+g'^2}.$$

93. Supposons en second lieu que les atomes de la file vibrent dans la direction de l'axe zz' (*fig.* 32). Les actions sur m de deux atomes symétriques a et a' seront encore égales en intensité, mais elles seront toujours de signe contraire, puisque

Fig. 32.

si a s'éloigne de m, a' s'en approche, et réciproquement. Par suite, la résultante de cette double action sera dirigée suivant nn' perpendiculairement à ox. En nommant θ l'angle oam et raisonnant comme ci-dessus, on trouvera pour expression de cette résultante

$$\tfrac{3}{4}k\frac{r^2}{am^2}\mathrm{V}\Delta t\cos^2\theta \quad \text{ou} \quad \tfrac{3}{4}k\frac{r^2z^2}{(x^2+z^2)^2}\mathrm{V}\Delta t.$$

Si l'on emploie les mêmes notations que plus haut et si l'on pose

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{z'^2}{(x'^2+z'^2)^2}\cos\frac{2\pi c}{\mathrm{T}v}\sqrt{x'^2+z'^2}=\gamma$$

et

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{z'^2}{(x'^2+z'^2)^2} \sin\frac{2\pi c}{\mathrm{T}v}\sqrt{x'^2+z'^2} = \gamma',$$

on trouvera, pour la vitesse de l'atome m,

$$\mathrm{V}'' = \mathrm{C}''e^{-kt} + abk\sin\varphi\left[\gamma\sin\left(\frac{2\pi t}{\mathrm{T}} - \varphi\right) - \gamma'\cos\left(\frac{2\pi t}{\mathrm{T}} - \varphi\right)\right]$$

et, après la période d'état variable,

$$\mathrm{V}'' = abk\sin\varphi\left[\gamma\sin\left(\frac{2\pi t}{\mathrm{T}} - \varphi\right) - \gamma'\cos\left(\frac{2\pi t}{\mathrm{T}} - \varphi\right)\right].$$

Cette fois l'amplitude du mouvement vibratoire est

$$2ab\cos\varphi\sqrt{\gamma^2+\gamma'^2}.$$

94. Dans les deux cas particuliers que nous venons d'examiner, la file d'atomes vibrants communique à l'atome en repos un mouvement vibratoire parallèle au sien et de même période; mais, dans le premier cas, les vibrations sont longitudinales, et, dans le second, transversales. Donc, pour savoir lesquelles sont plus facilement transmises, il faut comparer les amplitudes dans les deux cas ou, ce qui revient au même, les valeurs des deux radicaux $\sqrt{g^2+g'^2}$ et $\sqrt{\gamma^2+\gamma'^2}$. Or, à cause de l'extrême petitesse de l'arc $\frac{2\pi c}{\mathrm{T}v}$, nous pouvons approximativement remplacer les radicaux par g et γ, puis substituer à g et γ les deux intégrales suivantes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x'^2\,dz'}{(x'^2+z'^2)^2} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{x'}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z'^2\,dz'}{(x'^2+z'^2)^2} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{x'}.$$

Donc les amplitudes sont sensiblement égales et la facilité de transmission est la même pour les vibrations longitudinales et transversales; mais, dans l'un et l'autre cas, la propagation ne peut s'étendre à une distance appréciable. En effet, si nous supposons $x = c$ ou $x' = 1$, ce qui est l'hypothèse la plus favo-

rable, l'amplitude des vibrations de l'atome m devient

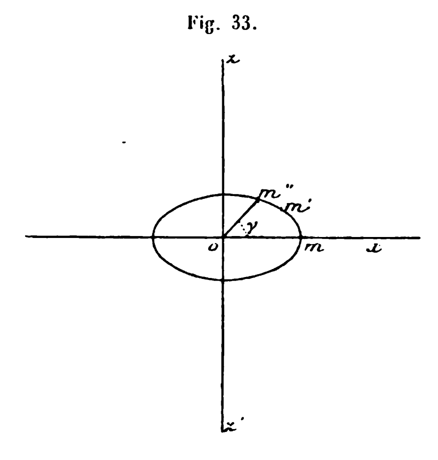
$$2ab\cos\varphi\frac{\pi}{2},$$

d'où l'on voit que la file excitatrice ne communique aux atomes voisins qu'un mouvement vibratoire très affaibli.

Toutefois il est bon d'observer que la facilité de transmission devient prépondérante pour les vibrations transversales, si l'on envisage le cas plus général où l'atome en repos m occupe une position quelconque dans le plan yox perpendiculaire à l'axe zz'.

Pour le prouver, traçons dans ce plan une circonférence de rayon $om = x$ (*fig.* 33); plaçons sur cette circonférence diffé-

Fig. 33.



rents atomes en repos m, m', m'', ..., et considérons l'influence qu'exerce sur eux la file des atomes en vibration.

Si ces atomes vibrent le long de zz', le mouvement communiqué à tous les atomes en repos m, m', m'', ... sera évidemment le même. Donc les vibrations transversales, exécutées par une file d'atomes vibrants, se transmettent avec une égale facilité tout à l'entour.

Il n'en est pas de même pour les vibrations longitudinales. Supposons que les atomes de la file vibrent parallèlement à ox et étudions leur action sur l'atome m'', par exemple. En dési-

gnant par A l'amplitude des vibrations communiquées à l'atome m situé sur ox et par γ l'angle mom'', nous trouverons que l'amplitude des vibrations de m'' se réduit à $A\cos\gamma$. L'amplitude atteint donc son maximum pour $\gamma = 0$, va en décroissant à mesure que γ augmente et devient nulle pour $\gamma = 90°$.

Ce que nous venons de dire pour les atomes m, m', m'', ... s'appliquerait à des files d'atomes en repos, situées sur le cylindre droit ayant zz' pour axe et le cercle mom''' pour section. En supposant la file excitatrice indéfinie, toutes les files d'atomes en repos situées sur les génératrices du cylindre prendraient un mouvement vibratoire identique dans le cas des vibrations transversales, et ce mouvement irait, au contraire, en s'affaiblissant comme ci-dessus, suivant la position de la file sur le cylindre, dans le cas des vibrations longitudinales.

Ajoutons que la résistance opposée par l'éon au mouvement vibratoire d'une file d'atomes est amoindrie (n° 102), lorsque le mouvement a lieu dans la direction même de la file, parce que chaque atome est aidé par ses voisins, tandis que la résistance conserve toute son intensité, lorsque les vibrations sont perpendiculaires à la direction de la file.

ARTICLE III.

Action d'une couche plane d'atomes vibrants sur un atome en repos.

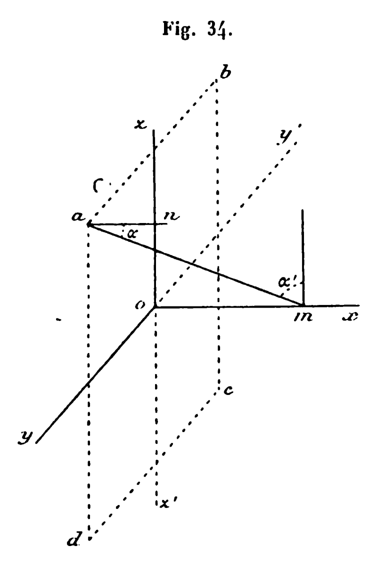
95. Concevons un réseau d'atomes couvrant le plan zy et situés aux points de croisement de deux séries de droites équidistantes et parallèles aux axes des z et des y. Supposons d'abord qu'ils vibrent perpendiculairement au plan zy, suivant la formule

$$V = a\frac{2\pi}{T}\sin 2\pi\frac{t}{T},$$

et calculons leur action sur un atome m placé sur l'axe des x à une distance $om = x$. Quatre atomes a, b, c, d (*fig.* 34), symétriques deux à deux par rapport aux axes zz' et yy', exerceront sur m des actions égales en intensité, dirigées suivant les droites am, bm, cm, dm, toutes attractives ou ré-

pulsives en même temps, et, par suite, leur résultante prendra la direction ox. Pour la calculer, joignons le pont m au pont a, dont les coordonnées sont y et z, et appelons α l'angle nam formé avec am par la direction du mouvement

Fig. 34.



vibratoire. L'action sur m de l'atome situé en a aura pour valeur

$$\frac{3}{8}k\frac{r^2}{am^2}\mathrm{V}\,\Delta t\cos\alpha,$$

et sa projection sur ox sera

$$\frac{3}{8}k\frac{r^2}{am^2}\mathrm{V}\,\Delta t\cos^2\alpha \quad \text{ou} \quad \frac{3}{8}k\frac{r^2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\mathrm{V}\,\Delta t.$$

Le temps employé par l'éon à parcourir la distance am sera

$$\frac{1}{v}\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

et si nous désignons par t l'instant où l'influence de l'atome a

se fait sentir en m, nous devons prendre

$$V = a\frac{2\pi}{T}\sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{v}\right),$$

et la résultante des actions de tout le réseau sera

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{3}{8}k\frac{r^2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}a\frac{2\pi c}{T}\sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{v}\right)\Delta t.$$

Pour $x = cx'$, $y = cy'$, $z = cz'$, $\frac{3}{8}\frac{r^2}{c^2} = b$,

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{x'^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2}\cos\frac{2\pi c}{Tv}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} = G$$

et

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{x'^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2}\sin\frac{2\pi c}{Tv}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} = G';$$

cette résultante devient

$$abk\frac{2\pi}{T}\left(G\sin\frac{2\pi t}{T} - G'\cos\frac{2\pi t}{T}\right)\Delta t$$

et ne diffère de celle que nous avons trouvée précédemment que par la substitution de G et G′ à g et g'.

En conséquence, nous trouverons pour la vitesse V′ de l'atome m

$$V' = C'e^{-kt} + abk\sin\varphi\left[G\sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi\right) - G'\cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi\right)\right],$$

et, après la période d'état variable,

$$V' = abk\sin\varphi\left[G\sin\left(2\pi\frac{t}{T} - \varphi\right) - G'\cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi\right)\right].$$

Nous trouverons aussi, pour l'amplitude du mouvement vibratoire,

$$2ab\cos\varphi\sqrt{G^2 + G'^2}.$$

96. Supposons, en second lieu, que les atomes du réseau vibrent parallèlement à l'axe des z. La résultante de leur action sur l'atome m sera aussi parallèle à ce même axe, et l'influence de l'atome a, en particulier, sera représentée par l'expression

$$\frac{3}{8} k \frac{r^2}{am^2} \mathrm{V} \cos^2 \alpha' \,\Delta t,$$

dans laquelle $\cos^2\alpha' = \dfrac{z^2}{x^2+y^2+z^2}$. Par suite, la résultante de l'influence totale du réseau sur m sera

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{3}{8} k \frac{r^2 z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} a \frac{2\pi}{\mathrm{T}} \sin \frac{2\pi}{\mathrm{T}}\left(t - \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{v}\right) \Delta t,$$

ou, en posant, comme ci-dessus, $x = cx'$, $y = cy'$, $z = cz'$, $\frac{3}{8}\frac{r^2}{c^2} = b$,

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{z'^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2} \cos \frac{2\pi c}{\mathrm{T}v}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} = \Gamma,$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{z'^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2} \sin \frac{2\pi c}{\mathrm{T}v}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} = \Gamma',$$

$$abk\frac{2\pi}{\mathrm{T}}\left(\Gamma \sin 2\pi\frac{t}{\mathrm{T}} - \Gamma' \cos\frac{2\pi t}{\mathrm{T}}\right)\Delta t.$$

Par conséquent, la vitesse V″ de l'atome m est, dans ce cas,

$$\mathrm{V}'' = \mathrm{C}'' e^{-kt} + abk \sin\varphi \left[\Gamma \sin\left(2\pi\frac{t}{\mathrm{T}} - \varphi\right) - \Gamma' \cos\left(2\pi\frac{t}{\mathrm{T}} - \varphi\right)\right]$$

et, après la période d'état variable,

$$\mathrm{V}'' = abk \sin\varphi \left[\Gamma \sin\left(2\pi\frac{t}{\mathrm{T}} - \varphi\right) - \Gamma' \cos\left(2\pi\frac{t}{\mathrm{T}} - \varphi\right)\right].$$

L'amplitude du mouvement vibratoire est aussi

$$2ab \cos\varphi \sqrt{\Gamma^2 + \Gamma'^2}.$$

97. Cherchons maintenant à apprécier l'amplitude du mouvement vibratoire communiqué dans les deux hypothèses examinées pour voir si la propagation peut s'étendre au loin. La condition requise pour cela est que l'amplitude décroisse très lentement, quand le mouvement passe d'une couche d'atomes à la suivante.

Or l'amplitude des vibrations de la couche excitatrice est $2a$; et, suivant que la direction des vibrations de l'atome m est longitudinale ou transversale par rapport à l'axe des x, l'amplitude de son mouvement vibratoire est

$$2a.b\cos\varphi\sqrt{G^2+G'^2} \quad \text{ou} \quad 2a.b\cos\varphi\sqrt{\Gamma^2+\Gamma'^2}.$$

Occupons-nous d'abord du calcul de $\sqrt{G^2+G'^2}$. Il est évident que, si l'on remplace par l'unité les cosinus et les sinus renfermés dans G et G', on augmente la valeur du radical et l'on a

$$\sqrt{G^2+G'^2}<\sqrt{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{x'^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2}.$$

D'autre part, les inégalités

$$\frac{1}{(x'^2+y'^2+1^2)^2}<\int_0^1\frac{dz'}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2},$$

$$\frac{1}{(x'^2+y'^2+2^2)^2}<\int_1^2\frac{dz'}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2},$$

....

conduisent à la relation

$$\sum_1^{\infty}\frac{1}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2}<\int_0^{\infty}\frac{dz'}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2} \text{ ou } <\frac{\pi}{4}\frac{1}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et, comme

$$\sum_1^{\infty}=\sum_{-\infty}^{-1},$$

on a en définitive

$$\sum_{z'=-\infty}^{z'=+\infty} \frac{x'^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2} < \frac{x'^2}{(x'^2+y'^2)^2} + \frac{\pi}{2}\frac{x'^2}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}};$$

un calcul du même genre donne

$$\sum_{y'=-\infty}^{y'=+\infty} \frac{x'^2}{(x'^2+y'^2)^2} < \frac{1}{x'^2} + \frac{\pi}{2}\frac{1}{x'}$$

et

$$\sum_{y'=-\infty}^{y'=+\infty} \frac{x'^2}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}} < \frac{1}{x'} + 2\int_0^\infty \frac{x'^2\,dy'}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{ou} \quad < \frac{1}{x'} + 2;$$

donc

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{x'^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2} < \frac{1}{x'^2} + \frac{\pi}{x'} + \pi$$

et enfin

$$\sqrt{G^2+G'^2} < \sqrt{2}\left(\frac{1}{x'^2} + \frac{\pi}{x'} + \pi\right).$$

Comme la plus petite valeur de x' est 1, la plus grande valeur de $\sqrt{G^2+G'^2}$ est inférieure à $(2\pi+1)\sqrt{2}$, et, par suite, l'amplitude du mouvement vibratoire de m est inférieure à $2a.b\cos\varphi(2\pi+1)\sqrt{2}$. Or $b\cos\varphi(2\pi+1)\sqrt{2}$ est très petit. Donc la décroissance de l'amplitude est très rapide, et un réseau d'atomes vibrants est impuissant à propager au loin des vibrations longitudinales.

98. Passons au calcul de $\sqrt{\Gamma^2+\Gamma'^2}$. En procédant comme ci-dessus, on trouverait

$$\sqrt{\Gamma^2+\Gamma'^2} < 2\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{z'^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2};$$

mais, cette fois, le second membre de l'inégalité est infini. En effet,

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{z'^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2}$$

$$=\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{x'^2+y'^2+z'^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2}-\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{x'^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2}$$

$$-\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{y'^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2};$$

or

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{y'^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2}=\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{z'^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2};$$

donc on a

$$2\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{z'^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2}$$

$$=\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x'^2+y'^2+z'^2}-\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{x'^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2},$$

mais le premier terme du second membre de cette égalité est infini, car on a successivement

$$\frac{1}{x'^2+y'^2+0}>\int_0^1\frac{dz'}{x'^2+y'^2+z'^2},$$

$$\frac{1}{x'^2+y'^2+1^2}>\int_1^2\frac{dz'}{x'^2+y'^2+z'^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

d'où

$$\sum_{z'=0}^{z'=\infty}\frac{1}{x'^2+y'^2+z'^2}>\int_0^{\infty}\frac{dz'}{x'^2+y'^2+z'^2}\quad\text{ou}\quad>\frac{\pi}{2\sqrt{x'^2+y'^2}}.$$

Or

$$\sum_{y'=0}^{y'=\infty} \frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

est une série divergente analogue à la série harmonique, puisque le dénominateur est du premier degré en y. Donc

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x'^2+y'^2+z'^2} = \infty.$$

D'autre part, nous avons vu tout à l'heure que

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{x'^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2}$$

avait une valeur finie. Donc

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{z'^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2} = \infty,$$

et l'inégalité ci-dessus se réduit à

$$\sqrt{\Gamma^2+\Gamma'^2} < \infty,$$

résultat qui ne nous apprend absolument rien sur la valeur probable de $\sqrt{\Gamma^2+\Gamma'^2}$ qui est certainement finie, car Γ et Γ' représentent deux séries convergentes. En effet, Γ, par exemple, est égal à

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{z'^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2} \cos \frac{2\pi c}{\mathrm{T}v}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2},$$

et, si l'on groupe ensemble tous les termes pour lesquels l'arc

$$\omega = \frac{2\pi c}{\mathrm{T}v}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$$

est compris entre o et $\frac{\pi}{2}$, puis tous ceux pour lesquels ce même arc est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$, puis encore tous ceux

pour lesquels il est compris entre $\frac{3\pi}{2}$ et $\frac{5\pi}{2}$, ..., on pourra dire que Γ est une série dont les termes sont alternativement positifs et négatifs, et d'ailleurs vont en décroissant. Donc Γ est une série convergente. Les mêmes considérations s'appliquent à Γ'. Donc $\sqrt{\Gamma^2+\Gamma'^2}$ a une valeur finie. Pour l'apprécier, essayons de la comprendre entre deux limites inférieure et supérieure. Pour cela, rappelons-nous que, dans une série convergente à termes alternativement positifs et négatifs, l'erreur commise en s'arrêtant à un terme quelconque est moindre que le terme suivant et de signe contraire à ce terme.

On aura, par suite, une valeur trop grande pour Γ, en faisant varier ω de toutes les manières possibles de o à $\frac{\pi}{2}$, et une valeur trop petite en le faisant varier ainsi jusqu'à $\frac{3\pi}{2}$. Pour connaître les valeurs maxima de y' et z' correspondant à ces variations, posons

$$\omega \text{ ou } \frac{2\pi c}{Tv}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}=\frac{\pi}{2}, \quad \text{d'où} \quad \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}=\frac{Tv}{4c}.$$

Le maximum de y' répond évidemment à $z'=0$, et, comme nous pouvons supposer $x'=1$ et négliger cette valeur relativement très petite, nous trouverons pour le maximum de y' et pareillement de z' la valeur

$$\frac{Tv}{4c}=N.$$

En posant $\omega=\frac{3\pi}{2}$, on aurait trouvé pour le maximum de y' et z'

$$\frac{3Tv}{4c}=3N.$$

Donc on a

$$\Gamma<\sum_{-N}^{+N}\sum_{-N}^{+N}\frac{z'^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2}\cos\frac{2\pi c}{Tv}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}=A$$

et

$$\Gamma > \sum_{-3N}^{+3N}\sum_{-3N}^{+3N} \frac{z'^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2} \cos\frac{2\pi c}{\mathrm{T}v}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} = \mathrm{B}.$$

Des raisonnements analogues conduiront aux deux inégalités

$$\Gamma' < \sum_{-2N}^{+2N}\sum_{-2N}^{+2N} \frac{z'^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2} \sin\frac{2\pi c}{\mathrm{T}v}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} = \mathrm{A}',$$

$$\Gamma' > \sum_{-4N}^{+4N}\sum_{-4N}^{+4N} \frac{z'^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2} \sin\frac{2\pi c}{\mathrm{T}v}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} = \mathrm{B}'.$$

Donc on a

$$\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{A}'^2} > \sqrt{\Gamma^2+\Gamma'^2} > \sqrt{\mathrm{B}^2+\mathrm{B}'^2}.$$

D'autre part, pour que le réseau d'atomes vibrants puisse propager des vibrations transversales à une grande distance, il faut que l'amplitude $2ab\cos\varphi\sqrt{\Gamma^2+\Gamma'^2}$ diffère très peu de $2a$ et, par suite, que $b\cos\varphi\sqrt{\Gamma^2+\Gamma'^2}$ soit sensiblement égal à l'unité. Pour que cette condition soit satisfaite, on doit avoir

$$\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{A}'^2} > \frac{1}{b\cos\varphi} > \sqrt{\mathrm{B}^2+\mathrm{B}'^2}$$

ou simplement

$$\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{A}'^2} > \frac{8}{3}\frac{c^2}{r^2} > \sqrt{\mathrm{B}^2+\mathrm{B}'^2};$$

car $\cos\varphi$ est très voisin de l'unité.

Puisque les deux limites qui comprennent $\sqrt{\Gamma^2+\Gamma'^2}$ croissent indéfiniment avec N et que $\frac{1}{b\cos\varphi}$ a une valeur fixe, quoique très grande, il est certain qu'il existe une valeur de N pour laquelle $\sqrt{\Gamma^2+\Gamma'^2}$ s'approche, autant qu'on veut, de $\frac{1}{b\cos\varphi}$. Donc, pour une valeur suffisamment grande de N, ou, ce qui revient au même, pour une valeur suffisamment petite de l'arc $\frac{2\pi c}{\mathrm{T}v}$, un réseau d'atomes vibrants peut propager au

loin des vibrations transversales, tandis qu'il est impuissant à propager des vibrations longitudinales.

99. Observons toutefois que la valeur $N = \frac{Tv}{4c}$ n'est pas arbitraire et ne peut pas croître à volonté. Elle sera d'autant plus grande que la distance interatomique c sera plus petite et que la période de vibration T sera plus longue. Ainsi les mouvements vibratoires se propageront d'autant plus loin que la densité de l'éther et la longueur d'onde seront plus considérables.

Mais, si, pour les valeurs de c et T réalisées dans l'univers, $\sqrt{\Gamma^2 + \Gamma'^2}$ n'approchait pas de $\frac{1}{b \cos \varphi}$, il faudrait conclure qu'un réseau d'atomes vibrants, tout en se prêtant à transmettre beaucoup plus facilement les vibrations transversales que les vibrations longitudinales, serait encore impuissant à propager au loin les unes comme les autres. Dans ce cas, on substituerait à un réseau simple un assemblage de réseaux, et l'on conçoit sans peine qu'on arriverait, par le concours de leurs influences multiples, à transmettre les vibrations transversales à de grandes distances.

Aussi, dans l'article suivant, nous ne nous occuperons que des vibrations longitudinales, et nous montrerons que même une couche indéfinie de réseaux est impuissante à les propager.

ARTICLE IV.

Action d'une couche d'atomes vibrants, d'épaisseur indéfinie, sur un atome en repos.

100. Soit m l'atome en repos situé à l'origine o des coordonnées et soit $oa = c$ (*fig.* 35) la distance du premier réseau $z_1 y_1$ de la couche. Les autres réseaux seront placés aux distances $2c$, $3c$, ..., et un réseau quelconque $z_n y_n$ se trouvera à la distance $x = nc$. Représentons son mouvement vibratoire par sa formule

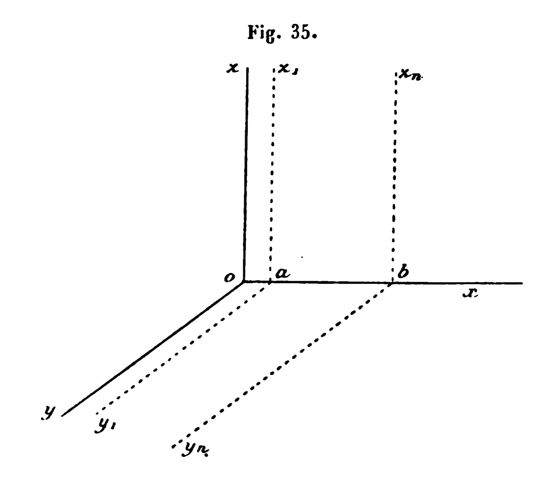
$$V = a \frac{2\pi}{T} \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + n\varphi\right),$$

φ satisfaisant toujours à la relation

$$\tang\varphi = \frac{2\pi}{k\mathrm{T}}.$$

Dans l'hypothèse du mouvement vibratoire parallèle à l'axe

Fig. 35.



des x, la résultante de l'action du réseau $z_n y_n$ sur l'atome m sera

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{3}{8}k\frac{r^2 x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,a\frac{2\pi}{\mathrm{T}}\sin\left[n\varphi+\frac{2\pi}{\mathrm{T}}\left(t-\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{v}\right)\right],$$

et pour $x = cx'$, $y = cy'$, $z = cz'$, $\frac{3}{8}\frac{r^2}{c^2} = b$,

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{x'^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2}\cos\frac{2\pi c}{\mathrm{T}v}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} = \mathrm{G},$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{x'^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)}\sin\frac{2\pi c}{\mathrm{T}v}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} = \mathrm{G}';$$

cette résultante devient

$$abk\frac{2\pi}{\mathrm{T}}\left[\mathrm{G}\sin\left(2\pi\frac{t}{\mathrm{T}}+n\varphi\right)-\mathrm{G}'\cos\left(2\pi\frac{t}{\mathrm{T}}+n\varphi\right)\right]$$

ou

$$abk\frac{2\pi}{T}\Big[(G\cos x'\varphi + G'\sin x'\varphi)\sin 2\pi\frac{t}{T}$$
$$-(G'\cos x'\varphi - G\sin x'\varphi)\cos 2\pi\frac{t}{T}\Big].$$

Par suite, la résultante R des actions de la couche indéfinie sur l'atome m, à l'instant t, sera

$$R = abk\frac{2\pi}{T}\sum_{x'=1}^{x'=\infty}(G\cos x'\varphi + G'\sin x'\varphi)\sin 2\pi\frac{t}{T}$$
$$-(G'\cos x'\varphi - G\sin x'\varphi)\cos 2\pi\frac{t}{T};$$

en posant

$$S = \sum_{x'=1}^{x'=\infty}(G\cos x'\varphi + G'\sin x'\varphi)$$

et

$$S' = \sum_{x'=1}^{x'=\infty}(G'\cos x'\varphi - G\sin x'\varphi),$$

on a

$$R = abk\frac{2\pi}{T}\left(S\sin 2\pi\frac{t}{T} - S'\cos 2\pi\frac{t}{T}\right).$$

Par suite, la vitesse de l'atome m, après la période d'état variable, est

$$V' = abk\sin\varphi\left[S\sin\left(2\pi\frac{t}{T} - \varphi\right) - S'\cos\left(2\pi\frac{t}{T} - \varphi\right)\right]$$

et l'amplitude est

$$2a.b\cos\varphi\sqrt{S^2 + S'^2}.$$

Or nous avons trouvé (n° 97)

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{x'^2}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^2} < \pi + \frac{\pi}{x'} + \frac{1}{x'^2}$$

et G ainsi que G' sont évidemment plus petits que cette

somme. Donc, *a fortiori*, on a

$$S < \sum_{x'=1}^{x'=\infty} \left(\pi - \frac{\pi}{x'} - \frac{1}{x'^2}\right)(\cos x'\varphi - \sin x'\varphi);$$

mais, lorsque $x'\varphi$ variera de φ à $2m\pi - \varphi$, la somme

$$\cos x'\varphi - \sin x'\varphi$$

passera par une série de valeurs égales et contraires. Donc on peut considérer comme nulle l'expression

$$\sum_{x'=1}^{x'=\infty} \pi(\cos x'\varphi - \sin x'\varphi)$$

et il reste

$$S < \sum_{x'=1}^{x'=\infty} \pi\left(\frac{\cos x'\varphi}{x'} + \frac{\sin x'\varphi}{x'}\right) + \frac{\cos x'\varphi}{x'^2} + \frac{\sin x'\varphi}{x'^2};$$

or

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin x'\varphi}{x'} = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \quad (^1),$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\cos x'\varphi}{x'^2} = \frac{\pi^2}{6} - \tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{4}\varphi^2, \qquad \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin x'\varphi}{x'^2} < \sum_{1}^{\infty} \frac{\cos x'\varphi}{x'^2},$$

et

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\cos x'\varphi}{x'} = -\,l\left(2\sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

Sur ces quatre sommes partielles, la dernière seule peut devenir très grande lorsque φ est très petit. Pour $\varphi = \frac{2\pi}{kT}$, on a sensiblement

$$2\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{2\pi}{kT} \quad \text{et} \quad -\log\left(\frac{2\pi}{kT}\right) = \log kT - \log 2\pi.$$

(1) CATALAN, *Traité élémentaire des séries*, p. 106.

Admettons que S soit égal à $\pi \log kT$ et donnons la même valeur à S', qui est certainement beaucoup plus petit que S; l'amplitude deviendra

$$2a.b\cos\varphi\pi\sqrt{2}\log kT,$$

et, pour que la propagation à grande distance puisse avoir lieu, il faudra qu'on ait approximativement

$$\pi\sqrt{2}\log kT = \frac{1}{b\cos\varphi}$$

ou, à peu près,

$$kT^{\pi\sqrt{2}} = e^{\frac{8}{3}\frac{c^2}{r^2}}.$$

Or, dans l'hypothèse où nous nous sommes placés, en supposant le rapport $\frac{c}{r}$ déjà grand, le nombre $e^{\frac{8}{3}\frac{c^2}{r^2}}$ serait tellement énorme qu'il nous paraît impossible d'assigner à kT une valeur probable satisfaisant à l'équation ci-dessus.

Donc enfin, dans l'éther libre, les vibrations longitudinales ne peuvent se propager au loin, mais s'éteignent très rapidement.

101. Nous restreignons toutefois cette conclusion aux cas où les longueurs d'onde sont du même ordre de grandeur que celle des rayons lumineux; car, si la longueur d'onde ou la période de vibration T qui lui correspond devenait considérable, si en même temps c diminuait par un accroissement de densité de l'éther, on conçoit que l'équation $kT^{\pi\sqrt{2}} = e^{\frac{8}{3}\frac{c^2}{r^2}}$ pourrait être satisfaite. Il est donc permis de supposer qu'une vaste et puissante compression de l'éther soit apte à se propager à de grandes distances. Dernièrement, nous avons vu les éruptions et l'effondrement du volcan de Krakatoa produire des ondes aériennes qui ont fait plusieurs fois le tour de la Terre. Or cette catastrophe n'est qu'une image très affaiblie des bouleversements prodigieux dont la surface du Soleil est le théâtre, et il ne paraît pas impossible que ces formidables

secousses déterminent, au sein de l'éther, des ondes longitudinales immenses, qui parviennent jusqu'à nous. Ainsi s'expliqueraient ces coïncidences, bien des fois observées, entre les perturbations de l'atmosphère solaire et les variations du magnétisme terrestre.

APPENDICE.

L'ÉTHER PROPAGATEUR DES MOUVEMENTS DE TRANSLATION.

Sous ce titre, nous pourrions développer de nombreux articles, et nous avions songé d'abord à les réunir ici en un Chapitre; mais nous avons préféré renvoyer à plus tard cette étude détaillée, et, pour le moment, nous nous bornerons à donner, dans trois paragraphes, quelques résultats généraux dont nous aurons prochainement besoin.

§ I.

Action réciproque d'atomes se mouvant en ligne droite.

102. Nous avons vu (nº 86) que deux atomes d'éther cheminant dans le même sens, le long d'une même droite, se prêtent une aide mutuelle pour vaincre la résistance de l'éon, et nous avons annoncé que plus la compagnie serait nombreuse, plus les mouvements seraient facilités. Nous allons démontrer la vérité de cette assertion.

Considérons d'abord trois atomes, a, a', a'', animés de vitesses de même sens V, V', V'', et appelons c et c' les distances qui séparent a de a' et a' de a''. Entre les cinq variables V, V', V'', c et c', nous aurons les cinq équations différentielles

$$(1)\qquad \frac{dV}{dt} = k\left(-V + \frac{3}{8}\frac{r^2}{c^2}V'\right),$$

$$(2)\qquad \frac{dV'}{dt} = k\left[-V' + \frac{3}{8}\left(\frac{r^2}{c^2}V + \frac{r^2}{c'^2}V''\right)\right],$$

(3) $$\frac{dV''}{dt} = k\left(-V'' + \frac{3}{8}\frac{r^2}{c'^2}V'\right),$$

(4) $$V - V' = -\frac{dc}{dt},$$

(5) $$V' - V'' = -\frac{dc'}{dt}.$$

Les trois premières équations montrent que la résistance de l'éon est diminuée pour chacun des atomes par l'influence de ses voisins. A première vue, il semble que l'atome du milieu a' bénéficie seul de la présence de ses deux compagnons. Néanmoins le premier et le troisième profitent aussi chacun de la présence de l'autre par l'intermédiaire du second. En effet, l'équation (1) nous montre que la résistance éprouvée par l'atome a diminue d'autant plus que V' est plus grand. Or l'atome a'' contribue à diminuer le ralentissement de V'; donc il contribue aussi à faciliter le mouvement de l'atome a. L'équation (3) nous montrerait de même que le mouvement de a'' est influencé par l'atome a. Cependant l'atome a', protégé, pour ainsi dire, par ses deux voisins, est celui qui éprouve le moins la résistance des courants éoniens, et, si l'on supposait les trois vitesses égales à l'origine du temps, V' prendrait le dessus sur V et V''.

Pour le prouver, multiplions les équations (1), (2) et (3) respectivement par V, V', V'', et, après avoir ajouté membre à membre la première et la troisième, retranchons-en la seconde; nous obtiendrons l'équation

$$V\frac{dV}{dt} + V''\frac{dV''}{dt} - V'\frac{dV'}{dt} = -k(V^2 + V''^2 - V'^2),$$

d'où

$$V^2 + V''^2 - V'^2 = e^{2-kt}(V_0^2 + V_0''^2 - V_0'^2),$$

en désignant les vitesses à l'origine par V_0, V'_0, V''_0, ... Si l'on suppose ces vitesses égales, on a

$$V'^2 = V^2 + V''^2 - V_0^2 e^{-2kt};$$

or V''^2 est plus grand que $V_0^2 e^{-2kt}$, puisque le mouvement isolé

de l'atome a'' donnerait $V''^2 = V_0^2 e^{-2kt}$. Donc V' est plus grand que V, et pour la même raison plus grand que V''.

Ainsi le second atome s'éloigne du premier pour se rapprocher du troisième; par suite, son influence sur celui-ci devient prépondérante et l'on a $V'' > V$. Le premier atome reste donc en arrière, et le second s'approche du troisième en le poussant devant lui.

103. Soit maintenant une file d'atomes $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ dont les vitesses, toutes de même sens, sont $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n$, et les distances mutuelles $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$. Nous aurons le système suivant d'équations :

$$\begin{aligned}
\frac{dV_1}{dt} &= k\left(-V_1 + \frac{3}{8}\frac{r^2}{c_1^2}V_2\right), \\
\frac{dV_2}{dt} &= k\left[-V_2 + \frac{3}{8}\left(\frac{r^2}{c_1^2}V_1 + \frac{r^2}{c_2^2}V_3\right)\right], \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\frac{dV_{n-1}}{dt} &= k\left[-V_{n-1} + \frac{3}{8}\left(\frac{r^2}{c_{n-2}^2}V_{n-2} + \frac{r^2}{c_{n-1}^2}V_n\right)\right], \\
\frac{dV_n}{dt} &= k\left(-V_n + \frac{3}{8}\frac{r^2}{c_{n-1}^2}V_{n-1}\right).
\end{aligned}$$

Multiplions encore respectivement les équations successives par $V_1, V_2, \ldots, V_n$, puis ajoutons membre à membre celles de rang impair d'une part, celles de rang pair d'autre part, et retranchons la seconde somme de la première; nous aurons l'équation

$$\begin{aligned}
&V_1\frac{dV_1}{dt} + V_3\frac{dV_3}{dt} + \ldots - \left(V_2\frac{dV_2}{dt} + V_4\frac{dV_4}{dt} + \ldots\right) \\
&= -k[V_1^2 + V_3^2 + \ldots - (V_2^2 + V_4^2 + \ldots)];
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&V_1^2 + V_3^2 + \ldots - (V_2'^2 + V_4'^2 + \ldots) \\
&= e^{-2kt}[U_1^2 + U_3^2 + \ldots - (U_2^2 + U_4^2 + \ldots)],
\end{aligned}$$

en désignant par la lettre U les vitesses à l'origine.

Si toutes ces vitesses étaient égales à V_0 et si, de plus, le nombre n était pair, on aurait

$$V_1^2 + V_3^2 + \ldots + V_{n-1}^2 = V_2^2 + V_4^2 + \ldots + V_n^2;$$

la somme des forces vives des atomes de rang impair serait constamment égale à celle des atomes de rang pair.

Si le nombre n était impair et égal à $2m+1$, on aurait

$$V_1^2+V_3^2+\ldots+V_{2m+1}^2-(V_2^2+V_4^2+\ldots+V_{2m}^2)=V_0^2e^{-2kt};$$

la différence des deux sommes de forces vives serait égale à $V_0^2e^{-2kt}$.

Dans l'hypothèse où les distances primitives seraient égales en même temps que les vitesses, au premier instant les atomes a_1 et a_n avanceraient de la même quantité. Les atomes a_2, a_3, ..., a_{n-1} avanceraient aussi d'une même quantité; mais cette longueur serait un peu plus grande que la première, de sorte que la distance c_1 serait augmentée et la distance c_{n-1} diminuée. Par suite, l'influence de a_2 sur a_1, dans le second instant, serait moindre que celle de a_{n-1} sur a_n. La longueur qui sépare a_1 de a_n croîtrait donc dans le second instant, a_2 resterait aussi un peu en arrière relativement à a_3, tandis que a_{n-2} gagnerait du terrain sur a_{n-1}, etc. En continuant à examiner ce qui se passe aux divers instants successifs, on reconnaît qu'au bout d'un certain temps les atomes sont plus serrés en avant et plus espacés en arrière du mouvement; autrement, la densité va en croissant de la queue à la tête de la file, qui voit en même temps augmenter sa longueur.

Observons toutefois que nos équations différentielles ne seraient plus exactes si la distance des atomes cessait d'être grande par rapport à leur rayon.

§ II.

Action d'une file d'atomes en mouvement sur un atome voisin.

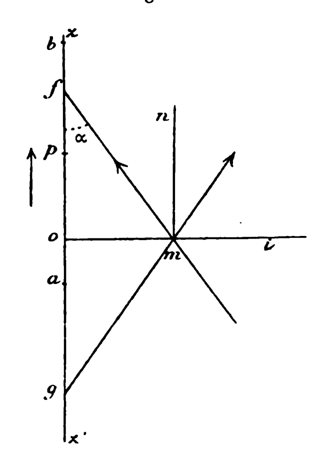
104. Soit une file d'atomes équidistants $z'z$ et soit c la distance qui les sépare. Nous supposons qu'ils se meuvent tous dans la direction oz avec une vitesse constante V qui leur a été donnée et qui leur est conservée par une cause quelconque, et nous nous proposons de calculer l'influence de leur mouvement sur un atome voisin m.

Abaissons du point m la perpendiculaire $mo = h$ et considérons un atome f de la file situé au-dessus de mo. Son action sur m sera attractive, dirigée suivant mf et égale à

$$\tfrac{3}{8} k V \Delta t \cos\alpha \frac{r^2}{mf^2},$$

en posant $mfo = \alpha$. Si l'on décompose cette impulsion en deux autres dirigées suivant mo et suivant mn parallèle à oz,

Fig. 36.



et si l'on fait $of = z$, d'où $mf^2 = h^2 + z^2$, on trouvera, pour les valeurs des deux composantes,

$$\tfrac{3}{8} k V \Delta t \frac{r^2 h z}{(h^2 + z^2)^2} \quad \text{et} \quad \tfrac{3}{8} k V \Delta t \frac{r^2 z^2}{(h^2 + z^2)^2}.$$

L'action d'un atome g de la file, situé au-dessous de mo, sera répulsive et donnera lieu à deux composantes dirigées suivant mi et mn, qui s'exprimeront comme les deux précédentes, en considérant z comme négatif du côté oz'. Par suite, les composantes de l'influence totale de la file auront pour valeur la composante horizontale

$$\tfrac{3}{8} k V \Delta t \sum \frac{r^2 h z}{(h^2 + z^2)^2},$$

et la composante verticale

$$\tfrac{3}{8} k V \Delta t \sum \frac{r^2 z^2}{(h^2 + z^2)^2}.$$

Dans ces sommes, z prend les valeurs c, $2c$, $3c$, ..., $-c$, $-2c$, ... correspondant à tous les atomes de la file; mais, si l'on pose $z = cz'$, $h = ch'$, z' prendra les valeurs de la suite naturelle des nombres, et l'on aura

$$\sum \frac{r^2 z^2}{(h^2 + z^2)^2} = \frac{r^2}{c^2} \sum \frac{z'^2}{(h'^2 + z'^2)^2}$$

et

$$\sum \frac{r^2 hz}{(h^2 + z^2)^2} = \frac{r^2}{c^2} \sum \frac{h'z'}{(h'^2 + z'^2)^2}.$$

Si la perpendiculaire *mo* coupe la file en deux parties égales, les éléments de $\sum \frac{r^2 hz}{(h^2 + z^2)^2}$ seront deux à deux égaux et de signe contraire. Par suite, cette somme sera nulle et le résultat définitif de l'influence totale sera une impulsion dans la direction *mn*.

Si *mo* coupe la file en longueurs inégales, l'atome *m* subira une attraction ou une répulsion suivant que la plus grande longueur sera au-dessus ou au-dessous de *mo*. Prenons la première hypothèse : soient *a* et *b* les extrémités de la file, dont le milieu est *p*; l'atome *m* ira en s'approchant de la file, jusqu'à ce qu'il soit parvenu à la hauteur du point *p*, puis il s'en éloignera, décrivant ainsi une courbe dont la convexité est tournée vers la file et dont la distance minimum est en face du point *p* (¹).

105. Examinons en particulier le cas où la file serait infinie. Alors l'impulsion est constamment parallèle à $z'z$, et le mouvement de l'atome *m*, supposé d'abord au repos, est

(¹) A la hauteur du point *p*, la force deviendra répulsive, d'attractive qu'elle était; mais l'atome *m* continuera encore quelques instants à se rapprocher de la file zz', à cause de la vitesse acquise.

réglé par l'équation

$$\frac{dU}{dt} = k\left[-U + \frac{3}{8}V\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{r^2 z^2}{(h^2+z^2)^2}\right].$$

Dans le cas actuel, la sommation peut être effectuée rigoureusement. En effet,

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{r^2 z^2}{(h^2+z^2)^2} = 2\sum_{1}^{\infty}\frac{r^2 z^2}{(h^2+z^2)^2} = 2\frac{r^2}{c^2}\sum_{1}^{\infty}\frac{z'^2}{(h'^2+z'^2)^2}$$

et

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{z'^2}{(h'^2+z'^2)^2} = \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{h'^2+z'^2} - h'^2\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(h'^2+z'^2)^2}.$$

Or on sait que l'on a (¹)

$$\frac{\cos\varphi}{h'^2+1} + \frac{\cos 2\varphi}{h'^2+2^2} + \frac{\cos 3\varphi}{h'^2+3^2} + \ldots$$
$$= \frac{1}{2h'^2}\left(\pi h'\frac{e^{h'(\pi-\varphi)} + e^{-h'(\pi-\varphi)}}{e^{\pi h'} - e^{-\pi h'}} - 1\right);$$

pour $\varphi = 0$, cette série devient

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{h'^2+z^2} = \frac{1}{2h'^2}\left(\pi h'\frac{e^{\pi h'} + e^{-\pi h'}}{e^{\pi h'} - e^{-\pi h'}} - 1\right).$$

D'autre part, si l'on élève cette série au carré, pour intégrer ensuite de o à π tous ses termes multipliés par $d\varphi$, les intégrales des doubles produits seront nulles en vertu de la relation

$$\int_0^{\pi}\cos nx \cos mx\, dx = 0,$$

et les intégrales des carrés des termes seront de la forme $\frac{1}{(h'^2+z'^2)^2}\,\frac{\pi}{2}$, en vertu de la relation

$$\int_0^{\pi}\cos^2 nx\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

(¹) CATALAN, *Traité élémentaire des séries*, p. 115.

Donc la somme de toutes les intégrales particulières sera

$$\frac{\pi}{2}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(h'^2+z'^2)^2}.$$

D'autre part, on trouvera

$$\int_0^{\pi}\frac{1}{4h'^4}\left[\pi h'\frac{e^{h'(\pi-\varphi)}+e^{-h'(\pi-\varphi)}}{e^{\pi h'}-e^{-\pi h'}}-1\right]^2 d\varphi$$

$$=\frac{1}{4h'^4}\left[\frac{\pi h'(e^{2\pi h'}-e^{-2\pi h'}+4\pi h')}{(e^{\pi h'}-e^{-\pi h'})^2}-2\right]\frac{\pi}{2}.$$

Donc $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(h'^2+z'^2)^2}$ égale cette même expression divisée par $\frac{\pi}{2}$.

En réunissant ces divers résultats, on trouve finalement

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{z'^2}{(z'^2+h'^2)^2}=\frac{\pi}{2h'}\left[\frac{e^{2\pi h'}-e^{-2\pi h'}-4\pi h'}{(e^{\pi h'}-e^{-\pi h'})^2}\right].$$

Si h est grand par rapport à la distance interatomique c, la quantité entre crochets se réduira sensiblement à l'unité, et l'action de la file sur l'atome m sera en raison inverse de la distance h. Du reste, lorsque h est suffisamment grand, on peut, sans inconvénient, substituer le signe $\int$ au signe Σ, et l'on trouve immédiatement

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z^2\,dz}{(h^2+z^2)^2}=\frac{\pi}{2h}.$$

En résumé, l'influence de la file sur l'atome m est égale à

$$\frac{3}{16}k\mathrm{V}\,\Delta t\frac{\pi r^2}{ch},$$

et la vitesse U que peut atteindre cet atome est donnée par l'expression

$$\mathrm{U}=\frac{3}{16}\mathrm{V}\frac{\pi r^2}{ch}.$$

Elle ne sera donc qu'une faible fraction de V; par suite une seule file d'atomes n'exerce pas une force d'entraînement appréciable sur les atomes voisins.

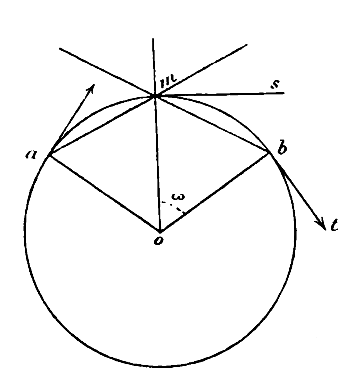
Mais si, au lieu d'une seule file d'atomes, nous considérons un courant formé d'un faisceau de files semblables, ce courant pourra déterminer, dans le milieu qui l'environne, un courant latéral sensible.

§ III.

Action d'un courant circulaire 1° sur un de ses atomes; 2° sur un atome du milieu.

106. Premier cas. — Concevons une série d'atomes distribués uniformément sur la circonférence de rayon $om = \rho$ (*fig.* 37) et animés au même instant de vitesses égales V

Fig. 37.



dirigées suivant les tangentes; et considérons l'action sur l'atome m de deux atomes a et b symétriques par rapport à mo. La corde mb fait avec la tangente bt un angle égal à $\frac{\omega}{2}$, en faisant $mob = \omega$. L'action de b sur m, dirigée suivant mb, peut donc être représentée par

$$\tfrac{3}{8} k \mathrm{V} \cos\frac{\omega}{2} \frac{r^2}{mb^2}$$

ou

$$\tfrac{3}{8}kV\cos\frac{\omega}{2}\,\frac{r^2}{4\rho^2\sin^2\frac{\omega}{2}}=\tfrac{3}{32}kV\frac{r^2}{\rho^2}\,\frac{\cos\frac{\omega}{2}}{\sin^2\frac{\omega}{2}}.$$

L'action de a sur m a la même valeur absolue que celle de b, mais elle est répulsive au lieu d'être attractive, et la résultante des deux, dirigée suivant la tangente ms, est égale à

$$\tfrac{3}{16}kV\frac{r^2}{\rho^2}\cot^2\frac{\omega}{2}.$$

Par suite, l'influence totale du courant circulaire est

$$\tfrac{3}{16}kV\frac{r^2}{\rho^2}\sum\cot^2\frac{\omega}{2}.$$

Si le nombre des atomes du courant est $2n$ et si c désigne toujours l'intervalle interatomique, on donnera successivement à ω les valeurs $\frac{c}{\rho}, \frac{2c}{\rho}, \dots, \frac{nc}{\rho}=\pi$. Il est d'ailleurs facile de trouver deux limites qui comprennent $\sum\cot^2\frac{\omega}{2}$. En effet, de o à $\frac{\pi}{2}$, on a toujours $\tang\frac{\omega}{2}>\frac{\omega}{2}$, et, par suite, $\sum\cot^2\frac{\omega}{2}$ ou $\sum\frac{1}{\tang^2\frac{\omega}{2}}<\sum\frac{1}{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2}$ ou $<\frac{4\rho^2}{c^2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{4^2}\right)$, et *a fortiori* $<\frac{2}{3}\,\frac{\pi^2\rho^2}{c^2}$.

D'autre part,

$$\sum\cot^2\frac{\omega}{2}=\sum\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\omega}{2}}-1\right);$$

or on a

$$\sum\frac{1}{\sin^2\frac{\omega}{2}}>\sum\frac{1}{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2},$$

et, si le nombre des atomes du courant est considérable, on a

sensiblement

$$\sum \frac{1}{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2} = \frac{2}{3}\frac{\pi^2\rho^2}{c^2}.$$

et, par conséquent,

$$\sum \cot^2\frac{\omega}{2} > \frac{2}{3}\frac{\pi^2\rho^2}{c^2} - n \text{ ou } -\frac{\pi\rho}{c}.$$

La différence des deux limites $\frac{\pi\rho}{c}$ est grande; néanmoins, en donnant à $\sum \cot^2\frac{\omega}{2}$ la valeur $\frac{2}{3}\frac{\pi^2\rho^2}{c^2}$, on commettra une erreur relative assez faible, savoir $\frac{3c}{2\pi\rho}$, et l'influence du courant circulaire sur lui-même ou sur chacun de ses atomes deviendra $\frac{1}{8}kV\frac{\pi^2 r^2}{c^2}$.

Lorsqu'il s'agit d'un courant rectiligne, chaque atome n'est directement influencé que par ses deux voisins, et cette double influence égale $\frac{3}{4}kV\frac{r^2}{c^2}$, quantité moindre que la précédente. De plus, comme nous l'avons vu (n° 103), la résistance et les distances interatomiques varient d'un bout à l'autre de la file, tandis que ces deux grandeurs sont toujours égales pour les divers atomes du courant circulaire.

107. Observons toutefois que les espaces interatomiques, tout en restant égaux, tendent à s'accroître, en même temps que le rayon du courant circulaire.

En effet, nous supposons à l'origine tous les atomes animés de la vitesse V dans la direction tangentielle au cercle. Les influences réciproques, aussi bien que la résistance de l'éon, ont la même direction. Donc, au premier instant Δt, tous ces atomes doivent s'avancer sur les tangentes d'une même longueur très petite λ.

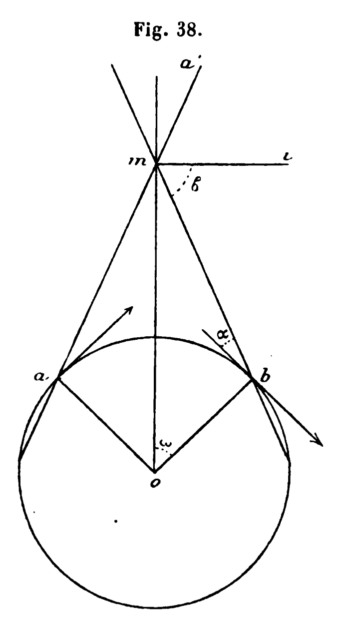
Par suite, ils se trouvent encore situés sur une même circonférence, mais les directions de leur mouvement ne sont plus rigoureusement perpendiculaires aux rayons de la nouvelle circonférence. Cependant, comme la déviation est la

même pour tous, il est facile de reconnaître que la résultante des actions d'influence est encore dirigée suivant la tangente et, par suite, qu'elle tend à maintenir le mouvement circulaire.

En réalité, le cercle sur lequel se meut le courant a son centre fixe, mais son rayon croît progressivement, et si l'on veut suivre le mouvement d'un atome en particulier, on trouvera qu'il décrit une spire dont le centre du cercle primitif est le pôle.

108. Second cas : *Action d'un courant circulaire sur un atome m du milieu.* — Supposons d'abord que m soit dans le plan du cercle o (*fig.* 38) et prenons encore deux atomes a

Fig. 38.



et b symétriques par rapport à mo. L'atome b exerce une action attractive dirigée suivant mb et égale à

$$\tfrac{3}{8} k\text{V} \cos\alpha \frac{r^2}{mb^2}.$$

L'atome a exerce une action répulsive de même valeur di-

rigée suivant ma', et la résultante des deux, dirigée suivant mi, perpendiculaire à mo, égale

$$\tfrac{3}{4} k V \cos\alpha \cos\beta \frac{r^2}{mb^2}.$$

Or, en posant $mo = h$, $mob = \omega$, on a

$$mb^2 = h^2 + \rho^2 - 2h\rho\cos\omega$$

et la résultante totale des influences partielles prend la forme suivante

$$\tfrac{3}{4} k V \sum \frac{r^2 \cos\alpha\cos\beta}{h^2+\rho^2-2h\rho\cos\omega};$$

mais

$$\frac{\rho}{\cos\beta} = \frac{h}{\cos\alpha} \quad \text{et} \quad \beta = \omega + \alpha,$$

relations d'où l'on déduit

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\rho h \sin^2\omega}{h^2+\rho^2-2\rho h\cos\omega},$$

et la résultante peut s'écrire

$$\tfrac{3}{4} k V \frac{r^2\rho}{h^3} \sum \frac{\sin^2\omega}{\left[1+\frac{\rho^2}{h^2}-2\frac{\rho}{h}\cos\omega\right]^2}.$$

Nous avons pris le point m en dehors du cercle o; mais la formule ne change pas si on le prend en dedans, c'est-à-dire si l'on fait $h < \rho$.

Pour $h = \rho$, la somme à effectuer devient $\sum \cot^2\frac{\omega}{2}$ et l'on retrouve la formule établie directement plus haut.

Enfin, dans l'hypothèse où l'atome m ne serait pas situé dans le plan du cercle o et où la droite mo ferait avec ce plan un angle ψ, on trouverait, pour valeur de la résultante,

$$\tfrac{3}{4} k V r^2 \rho h \cos\psi \sum \frac{\sin^2\omega}{(h^2+\rho^2-2h\rho\cos\psi\cos\omega)^2}.$$

D'ailleurs, cette force est toujours perpendiculaire à la

CHAPITRE IV.

L'ÉTHER ET SES RAPPORTS AVEC L'ÉON.

CHAPITRE V.

ÉLASTICITÉ DE L'ÉTHER.

CHAPITRE VI.

L'ÉTHER PROPAGATEUR DES MOUVEMENTS VIBRATOIRES.

APPENDICE.

L'ÉTHER PROPAGATEUR DES MOUVEMENTS DE TRANSLATION.

10607 Paris. — Imprimerie de Gauthier-Villars, quai des Grands-Augustins, 55.



